



M. F. Gilmullin, "The Mathematician's Bible: Higher and Linear Algebra," *Mathematics with Mansur*, Dec. 8, 2024. [Online]. Available: <https://history-math.org/publications/hm-tt-911cb8fa227f-en/>.

ESSAY

The Mathematician's Bible: Higher and Linear Algebra

A new book by Mansur Gilmullin, author of *Mathematics with Mansur-abyy*: a lifetime of material on the foundations of algebra.

Mansur Gilmullin · 08.12.2024 · EN

[Read this article on the journal website](https://history-math.org/publications/hm-tt-911cb8fa227f-en/)



M. F. Gilmullin's book. Publication details: The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra / M. F. Gilmullin. Yekaterinburg: Izdatelskiye Resheniya, 2024. 765 pp. ISBN 978-5-0065-0464-6. · [Source](https://history-math.org/publications/hm-tt-911cb8fa227f-en/)

Channel author Mansur Gilmullin:

*Dear friends, colleagues, mathematics enthusiasts and valued readers of my Mathematics with Mansur-abyy channel! 🤝 I am delighted to announce that, after five years of preparation, my work has finally been published — a work for which I have collected material throughout my life! 🎉 This is my new book, **The Mathematician's Bible**.*

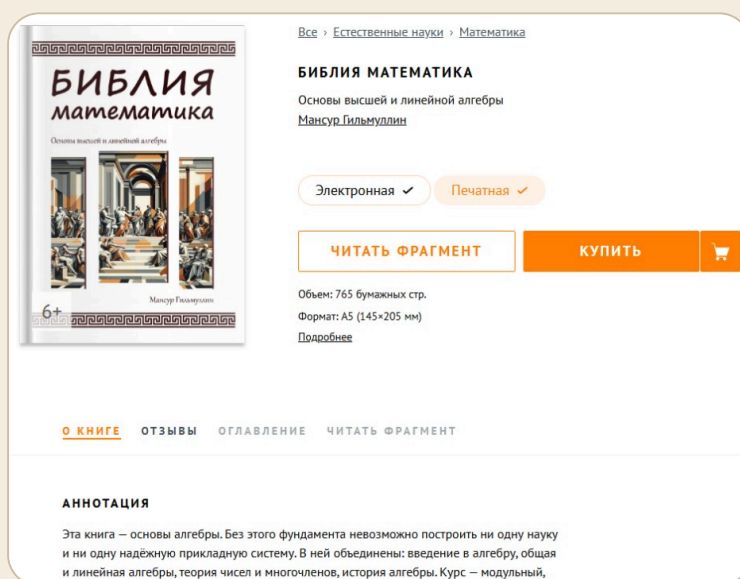
Perhaps you are a beginning engineer or programmer? Have you spent considerable time and money on books and courses, only to freeze whenever formulas appear? Or perhaps you are already an experienced IT specialist, but struggle to understand the mathematics underlying your profession? Then this book is for you! It is a textbook with a broader purpose than the usual meaning of that word. My aim in writing it was to give a wide readership basic knowledge of algebra and an understanding of its concepts and methods, its place in mathematics and computer science, and its practical applications.

The Mathematician's Bible covers the foundations of algebra. Without knowledge of this foundation, no science and no reliable applied system can be built.

The book's material is presented in the familiar, accessible form of a lecture course and follows the methodological requirements of university programmes in education, economics and technology. It combines an introduction to algebra, abstract and linear algebra, number theory, polynomial theory, and the history of algebra. The course can be used in modules: readers can choose only the sections they need. The concentric presentation of the main concepts and methods also helps: after they are introduced, they recur many times at different levels of abstraction and in different situations.

The book may be useful to engineers and specialists across a wide range of disciplines: mathematics, physics, education and information technology.

It is already available on the publisher's website, [Ridero.ru](https://ridero.ru), by searching for "[Гильмуллин Библия математика](https://ridero.ru)" ("[Gilmullin Mathematician's Bible](https://ridero.ru)").



A page for The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). Find it on the publisher's website, [Ridero.ru](https://ridero.ru), by searching for "[Гильмуллин Библия математика](https://ridero.ru)" ("[Gilmullin Mathematician's Bible](https://ridero.ru)"). · [Source](#)

Very soon it will also appear in other shops and library collections across the country. Look for these publication details:

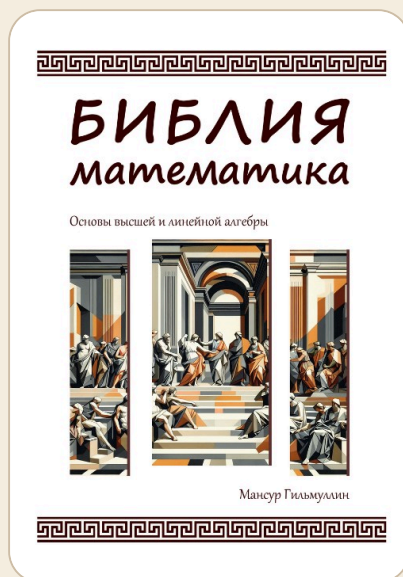
The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra / M. F. Gilmullin.
Yekaterinburg: Izdatelskiye Resheniya, 2024. 765 pp. ISBN 978-5-0065-0464-6

I have also ordered a small gift-edition print run from the publisher, with a beautiful hard cover. I will explain a little later how to obtain it. Meanwhile, you can explore selected pages and the book's contents below.

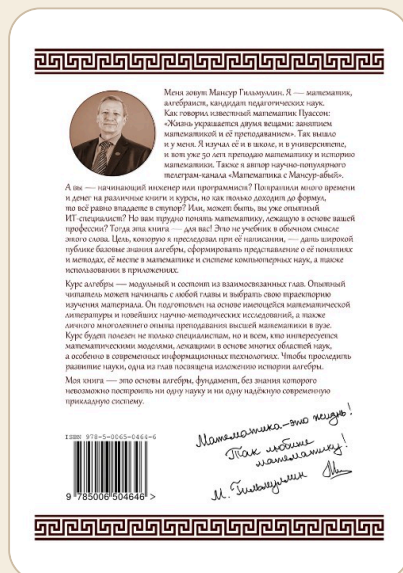
Thank you to everyone who believed in me, and thank you for your support! “Bez buldyrabyz” — Tatar for “We can”!

I hope my work will bring much benefit to you and to new generations of mathematicians!

Selected pages and the book's contents



The cover of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)



The back cover of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

Содержание		
Предисловие	3	
Принятые обозначения	14	
Глава 1. Введение в алгебру	15	
1.1. Операции над множествами и их основные свойства	16	
1.2. Операции над высказываниями	22	
1.3. Предикаты и кванторы	31	
1.4. Виды теорем	35	
1.5. Прямое произведение множеств	38	
1.6. Бинарные отношения	40	
1.7. Отношение эквивалентности. Фактор-множество	44	
1.8. Отношение порядка	48	
1.9. Функции и функциональные отношения	56	
1.10. Система натуральных чисел. Метод математической индукции	55	
Глава 2. Алгебраические системы	63	
2.1. Алгебры и алгебраические системы	64	
2.2. Бинарные алгебраические операции и их свойства	66	
2.3. Группы	68	
2.4. Подгруппы	72	
2.5. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп	73	
2.6. Кольцо и его свойства	75	
2.7. Поле	78	
2.8. Поле комплексных чисел	81	
2.9. Геометрическое представление комплексных чисел	85	
2.10. Тригонометрическая форма комплексного числа	87	
Глава 3. Системы линейных уравнений	94	
3.1. Системы линейных уравнений	95	
3.2. Векторное пространство	102	
756		
3.3. Линейная зависимость и независимость системы векторов	105	
3.4. Базис и ранг системы векторов	107	
3.5. Базис и размерность векторного пространства	109	
3.6. Ранг матрицы и его вычисление	111	
3.7. Критерий совместности систем линейных уравнений	115	
3.8. Подпространство	117	
3.9. Фундаментальная система решений	119	
3.10. Линейное многообразие	122	
Глава 4. Матрицы и определители	125	
4.1. Операции над матрицами и их свойства	126	
4.2. Обратная матрица	130	
4.3. Невырожденные матрицы	132	
4.4. Элементарные матрицы	134	
4.5. Вычисление обратной матрицы	137	
4.6. Перестановки	141	
4.7. Подстановки	144	
4.8. Определитель квадратной матрицы	146	
4.9. Основные свойства определителей	153	
4.10. Миноры. Разложение определителя по строке и столбцу	158	
4.11. Необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы	165	
4.12. Определитель произведения матриц	167	
4.13. Формула для обратной матрицы	169	
4.14. Правило Крамера	171	
4.15. Теорема о ранге матрицы	174	
Глава 5. Группы	176	
5.1. Множества с бинарными алгебраическими операциями	178	
5.2. Определения и свойства группы	185	
5.3. Примеры групп	191	
5.4. Группы подстановок	195	
5.5. Подгруппы и их свойства	199	
5.6. Циклические подгруппы. Порядок элемента группы	203	
757		

The contents of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

5.7. Циклические группы	207	8.5. Область целостности	313
5.8. Смежные классы	212	8.6. Ассоциированные элементы кольца	315
5.9. Теорема Лагранжа	216	8.7. Простые и составные элементы кольца	316
5.10. Нормальные делители группы	218	8.8. Идеалы кольца	318
5.11. Фактор-группа	221	8.9. Операции над идеалами	322
5.12. Изоморфизмы групп	226	8.10. Кольцо главных идеалов	325
5.13. Гомоморфизмы групп	232	8.11. Евклидово кольцо	327
Глава 6. Векторные пространства	238	8.12. Факториальность кольца главных идеалов	330
6.1. Связь между базисами конечномерного пространства	239	8.13. Гомоморфизмы колец	335
6.2. Изоморфизм векторных пространств	243	8.14. Сравнения и классы вычетов по идеалу	337
6.3. Операции над подпространствами	245	8.15. Фактор-кольцо	339
6.4. Скалярное умножение. Евклидово пространство	249	8.16. Теорема о гомоморфизмах колец	342
6.5. Ортогональность в евклидовом пространстве	253	8.17. Характеристика кольца	344
6.6. Изоморфизм в евклидовом пространстве	257	Глава 9. Теория делимости в кольце целых чисел	347
6.7. Ортогональное дополнение	260	9.1. Деление с остатком	348
6.8. Изоморфизм евклидовых пространств	262	9.2. Делимость и его свойства	350
Глава 7. Линейные операторы	264	9.3. Наибольший общий делитель	352
7.1. Линейные отображения и линейные операторы	265	9.4. НОД двух чисел. Алгоритм Евклида	353
7.2. Матрица линейного оператора	268	9.5. НОД нескольких чисел	356
7.3. Образ и ядро линейного оператора	272	9.6. Свойства НОД	357
7.4. Невырожденные линейные операторы	275	9.7. Взаимно простые числа	359
7.5. Операции над линейными операторами	277	9.8. Наименьшее общее кратное	363
7.6. Линейные алгебры	282	9.9. НОК двух чисел	364
7.7. Собственные векторы и собственные значения	287	9.10. НОК нескольких чисел	366
7.8. Характеристические корни линейного оператора	290	9.11. Простые и составные числа	368
7.9. Линейные операторы с простым спектром	295	9.12. Множество простых чисел	371
Глава 8. Кольца	299	9.13. Основная теорема арифметики	377
8.1. Определение, примеры и свойства колец	300	9.14. Числовые функции	380
8.2. Подкольцо	306	9.15. Целая и дробная часть числа	383
8.3. Обратные элементы кольца	309	9.16. Целые систематические числа	384
8.4. Отношение делимости в кольцах	311	9.17. Перевод чисел из одной системы счисления в другую	389
758		9.18. Арифметические операции над систематическими числами	391
		759	

The contents of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

9.19. Способы перевода чисел из одной системы счисления в другую	393	11.4. Деление многочлена на двучлен. Схема Горнера	498
9.20. Конечные целые дроби	397	11.5. Свойства разности многочленов	501
9.21. Подходящие дроби и их свойства	401	11.6. Деление с остатком	504
Глава 10. Теория сравнений и ее приложения	408	11.7. Наибольший общий делитель многочленов	508
10.1. Сравнения в кольце целых чисел	409	11.8. Свойства НОД многочленов	513
10.2. Приложения сравнений	413	11.9. НОК многочленов	518
10.3. Кольцо классов вычетов	416	11.10. Неприводимые многочлены	519
10.4. Полные системы вычетов	419	11.11. Каноническое разложение многочлена	523
10.5. Группы обратных элементов кольца классов вычетов	422	11.12. Формальная производная многочлена	526
10.6. Привативные системы вычетов	424	11.13. Кратные множители и кратные корни многочлена	530
10.7. Функция Эйлера	427	11.14. Примитивные многочлены	533
10.8. Теоремы Эйлера и Ферма	430	11.15. Факториальность кольца многочленов	539
10.9. Сравнения с одним неизвестным	432	11.16. Поле разложения многочлена	542
10.10. Сравнения первой степени	435	Глава 12. Многочлены над числовыми полями	547
10.11. Системы сравнений	440	12.1. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел	548
10.12. Сравнения высших степеней по простому модулю	442	12.2. Многочлены над полем действительных чисел	557
10.13. Сравнения по составному модулю	443	12.3. Решение уравнений малых степеней	560
10.14. Порядок числа и класса вычетов по модулю	447	12.4. Приводимость многочленов над полем рациональных чисел	571
10.15. Первообразные корни по простому модулю	451	12.5. Целые и рациональные корни многочлена	574
10.16. Искусство по простому модулю	455	12.6. Отделение действительных корней многочлена	578
10.17. Двучленные сравнения	459	Глава 13. Многочлены от нескольких переменных	587
10.18. Вычеты и невычеты	461	13.1. Кольцо многочленов от нескольких переменных	588
10.19. Символ Лежандра	463	13.2. Свойства кольца многочленов от нескольких переменных	594
10.20. Конечные систематические дроби	468	13.3. Лексикографическое упорядочение	599
10.21. Бесконечные систематические дроби	472	13.4. Симметрические многочлены	602
10.22. Периодические систематические дроби	476	13.5. Основная теорема о симметрических многочленах	606
10.23. Признаки делимости	483	13.6. Формулы Вейля	609
Глава 11. Многочлены от одной переменной	488	13.7. Результант. Исключение неизвестных	611
11.1. Кольцо многочленов от одной переменной	489	Глава 14. Расширения полей	619
11.2. Степень многочлена от одной переменной	492	14.1. Простое расширение поля	620
11.3. Корни многочлена	495	14.2. Конечные и алгебраические расширения поля	630
760		761	

The contents of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

14.3. Составное алгебраическое расширение поля	633
14.4. Алгебраически порожденные расширения поля	637
14.5. Структура поля разложения многочлена	641
14.6. Поле алгебраических чисел	643
14.7. Разрешимость уравнений в радикалах	646
Глава 15. Системы линейных неравенств и их приложения	654
15.1. Основные понятия теории систем линейных неравенств	655
15.2. Свойства однородной системы линейных неравенств	662
15.3. Критерий несовместности системы линейных неравенств	668
15.4. Неотрицательные решения системы линейных уравнений	673
15.5. Базисные решения системы линейных уравнений	676
15.6. Неотрицательные решения системы неравенств	683
15.7. Задачи линейного программирования	686
15.8. Двойственные задачи	692
15.9. Симплекс-метод	696
15.10. Симплекс-метод и вычисление неотрицательных решений	705
15.11. Транспортная задача	710
Глава 16. История развития алгебры	720
Список источников	754

Покупайте и читайте другие книги автора



История математики

Из книги «История математики» вы узнаете о математике как о части общечеловеческой культуры и науки. Мы представим её в хронологическом порядке, а к некоторым разделам истории математики обратимся несколько раз. Такой подход называется концентрическим. Богато иллюстрированный материал позволит вам познакомиться с теми, кто творил историю математики.

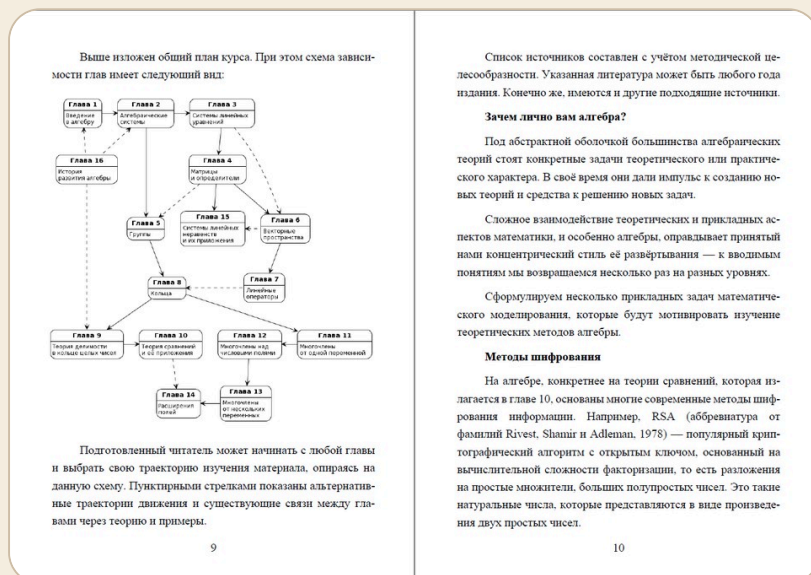
Книга будет полезна не только специалистам, но и всем, кто интересуется историей наук. Об этом вам не расскажут на школьных уроках и лекциях в вузе, а ведь без знания прошлого любой науки нельзя понять её настоящего и видеть будущее.

Почитать и купить книгу в печатном или электронном варианте можно на сайте книги в издательстве Ridero.ru.



Ссылка на книгу:
https://ridero.ru/books/istoriya_matematiki

The contents of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)



Список источников составлен с учётом методической целесообразности. Указанная литература может быть любого года издания. Конечно же, имеются и другие подходящие источники.

Зачем лично вам алгебра?

Под абстрактной оболочкой большинства алгебраических теорий стоят конкретные задачи теоретического или практического характера. В своё время они дали импульс к созданию новых теорий и средства к решению новых задач.

Сложное взаимодействие теоретических и прикладных аспектов математики, и особенно алгебры, оправдывает принятый нами концентрический стиль её развёртывания — к важным понятиям мы возвращаемся несколько раз на разных уровнях.

Сформулируем несколько прикладных задач математического моделирования, которые будут мотивировать изучение теоретических методов алгебры.

Методы шифрования

На алгебре, конкретнее на теории сравнений, которая излагается в главе 10, основаны многие современные методы шифрования информации. Например, RSA (аббревиатура от фамилий Rivest, Shamir и Adleman, 1978) — популярный криптографический алгоритм с открытым ключом, основанный на вычислительной сложности факторизации, то есть разложения на простые множители, больших полупростых чисел. Это такие натуральные числа, которые представляются в виде произведения двух простых чисел.

Pages 9–10 of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

Глава 1.

Введение в алгебру

1.1. Операции над множествами и их основные свойства

Понятие *множества* относится к первоначальным, неопределяемым понятиям математики (синонимы: совокупность, собрание, класс).

Теория множеств была создана немецким математиком Георгом Кантором (1845–1918 гг.). Кантор даёт следующее описание понятия множества: «Под *множеством* мы понимаем любое объединение в одно целое M определённых вполне различимых объектов m из нашего восприятия или мысли (которые называют «элементами» из M).

Множество M считается заданным (определённым), если относительно любого объекта m можно установить, будет ли m элементом множества M или нет.

Обозначения

Эти множества чисел обозначают стандартно:

- N — натуральные,
- Z — целые,
- Q — рациональные,
- R — действительные,
- C — комплексные числа.

Pages 15–16 of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

В настоящее время теория групп — самая развитая область высшей алгебры. Она имеет многочисленные приложения в математике, в геометрии, топологии, теории функций, квантовой механике и кристаллографии.

Термин «группа» ввёл Эварист Галуа (1830). Началом этой теории стали исследования по решению алгебраических уравнений: Лагранж (1771), Руффини (1799), Абель (1824), Галуа (1830).

Другой источник — классификация геометрий на основе понятия группы преобразований («Эрлангенская программа» Клейна, 1872), теория чисел (работы Эйлера о вычетах, 1761), работы Гаусса о композиции двучленных квадратичных форм, 1801).

Современное абстрактное понятие группы выработалось в конце XIX в. (Жордан, Кэли, Фробениус). Артур Кэли первым сформулировал определение группы в том виде, как она определяется сегодня — множество с ассоциативной и обратимой бинарной операцией.

Изучение групп впервые оформилось в самостоятельную область математики с выходом книги О. Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп» (1916).



Галуа, Эварист
(1811–1832 гг.)

177

5.1. Множества с бинарными алгебраическими операциями

Чаше всего в алгебре встречаются бинарные алгебраические операции на произвольном множестве M . Под ними понимают отображение декартова квадрата $M \times M$ множества M на себя, например, $\sigma: M \times M \rightarrow M$. В классической алгебре их ещё называют законами композиции.

Пример

Сложение натуральных чисел — бинарная алгебраическая операция:

$$+: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$+(a, b) = a + b$$

Таким образом, любой упорядоченной паре (a, b) элементов $a, b \in M$ ставится в соответствие однозначно определённый элемент $\sigma(a, b)$ того же множества M .

Чаше всего вместо $\sigma(a, b)$ пишут: $a \circ b$, либо бинарную операцию обозначают специальным символом типа $+$, $\cdot$, $\circ$.

Говорят, что операция $\circ$ определяет на M алгебраическую структуру, или что $(M, \circ)$ — алгебраическая система с одной бинарной операцией, более того, алгебра.

Примеры бинарных алгебраических операций на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$:

- стандартные: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$

178

Pages 177–178 of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

9.4. НОД двух чисел.

Алгоритм Евклида

Один из способов нахождения НОД вытекает непосредственно из его определения. Выписывают все положительные делители, затем выбирают среди них общие делители и среди них ищут тот, который делится на все общие делители. Это число и будет НОД.

Пример. $(18, 24) = 6$. Положительные общие делители этих чисел: 1, 2, 3 и 6. Общий делитель 6 делится на все общие делители.

Но этот способ не эффективен. Отметим более рациональный способ нахождения НОД сначала для двух чисел, а затем для нескольких чисел.

Способ нахождения НОД двух чисел был описан Евклидом в его труде «Начала» (III век до н. э.). Этот метод получил название **алгоритма Евклида**. Это самый древний из существующих теоретико-числовых алгоритмов.

Его доказательство опирается на две леммы.

Лемма. Если $a : b$, то $(a, b) = b$.

Доказательство

1. $a : b$, $b : b$ — b общий делитель.
2. Если $a : \delta$, $b : \delta$, то $b : \delta$.

353

Из 1–2 следует, что $(a, b) = b$. ■

Лемма. Если $a = bq + r$, $a, b, r \neq 0$, то $(a, b) = (b, r)$.

Доказательство. Пусть $(a, b) = d$.

1. $a : d$, $b : d \rightarrow r = (a - bq) : d$
2. $b : \delta$, $r : \delta \rightarrow a : \delta \rightarrow d : \delta$

Из 1–2 следует, что $(b, r) = d$. ■

Теорема (алгоритм Евклида)

Если разделить a с остатком на b , затем разделить b с остатком на полученный остаток, затем разделить с остатком первый остаток на второй остаток, и так далее, то последний, отличный от нуля, остаток равен НОД (a, b) .



Евклид
(ок. 325–265 гг. до н. э.)

Доказательство

Алгоритм Евклида — это алгоритм последовательного деления с остатком. Распишем описанный процесс.

Можно предположить, что $a > b > 0$.

$$a = bq_0 + r_1, 0 < r_1 < b$$

$$b = r_1q_1 + r_2, 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2q_2 + r_3, 0 < r_3 < r_2$$

...

354

Pages 353–354 of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

11.4. Деление многочлена на двучлен.

Схема Горнера

Чтобы разделить многочлен $f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 \in K[x]$ на двучлен $(x - c)$, $c \in K$, удобно использовать **схему Горнера**.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - c)q(x) + r \\ q(x) &= b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0 \\ r &= f(c) \text{ — по теореме Безу.} \end{aligned}$$

Раскроем скобки, приведём подобные члены и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x .

$$\begin{aligned} (x - c)(b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0) + r &= \\ = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - b_{n-1}c)x^{n-1} + \dots + &+ \\ + (b_0 - b_1c)x + (r - b_0c) \end{aligned}$$

$$a_n = b_{n-1}, a_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1}c, \dots$$

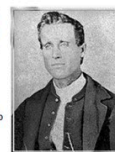
$$\dots, a_1 = b_0 - b_1c, a_0 = r - b_0c$$

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1}c, \dots$$

$$\dots, b_0 = a_0 + a_1c, r = a_0 + a_1c$$

Коэффициенты частного и остаток можно получить последовательно при помощи одноступенчатых вычислений, которые можно представить в виде таблицы (схема вычислений):

498



Горнер, Уильям Дорвал
(1766–1837 гг.)

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_0	r

Приложения схемы Горнера

1. Схема Горнера может быть использована для деления многочлена на двучлен, для вычисления значения многочлена при заданном значении переменной.

Пример. $f(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 9$ разделить на $(x + 2)$ и вычислить $f(-2)$.

	2	1	−2	0	9
−2	2	−3	4	−8	25

$$f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x - 8)(x + 2) + 25, f(-2) = 25$$

2. Схему Горнера удобно использовать при разложении многочлена $f(x)$ по степеням двучлена $(x - c)$.

$$f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$$

Выполняем многократно деления с остатком на $(x - c)$:

$$f = (x - c)q_0 + r_0, \deg q_0 = n - 1$$

$$q_0 = (x - c)q_1 + r_1, \deg q_1 = n - 2$$

...

$$q_{n-3} = (x - c)q_{n-2} + r_{n-2}, \deg q_{n-2} = 1$$

$$q_{n-2} = (x - c)q_{n-1} + r_{n-1}$$

499

Pages 498–499 of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

13.6. Формулы Виета

Пусть K — числовое кольцо ($K \subset \mathbb{C}$). Известно, что любой многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in K[x]$ степени n имеет ровно n комплексных корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, считая каждый корень столько раз, какова его кратность, и разлагается на линейные множители:

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

Приравняв коэффициенты двух записей многочлена $f(x)$:

$$\begin{cases} a_1 = -a_0(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \\ a_2 = a_0(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n) \\ \dots \\ a_n = (-1)^na_0\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \end{cases}$$

В правых частях полученных равенств стоят значения элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ от корней многочлена $f(x)$. Перепишем их следующей форме:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0} \\ \sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_2}{a_0} \\ \dots \\ \sigma_n = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

Сокращённо, $\sigma_k = (-1)^k\frac{a_k}{a_0}, 1 \leq k \leq n$.

Эти формулы, выражающие зависимость между корнями и коэффициентами многочлена, называются **формулами Виета**. Если многочлен $f(x)$ нормирован ($a_0 = 1$), то формулы Виета упрощаются: $\sigma_k = (-1)^ka_k$.

609

Для многочлена второй степени $f(x) = x^2 + px + q$ получаются известные формулы Виета элементарной алгебры, которые обычно записывают так:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1x_2 = q \end{cases}$$

Следствие

Пусть многочлен $f(x) \in K[x]$, $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ — его корни. Если $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — симметрический многочлен над K , то $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K$.

Доказательство

По основной теореме о симметрических многочленах существует $\psi \in K[x_1, \dots, x_n]$, такой, что:

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

Положим в этом равенстве $x_i = \alpha_i, 1 \leq i \leq n$.

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \psi(\sigma_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, \sigma_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \psi(-a_1, a_2, \dots, (-1)^na_n) \in K$$

так как $a_i \in K$ и коэффициенты ψ принадлежат K . ■

Замечание. Описанный алгоритм позволяет вычислить значение любого симметрического многочлена от корней данного многочлена, не находя сами корни.



Виет, Франсуа
(1540–1603 гг.)

610

Pages 609–610 of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

15.11. Транспортная задача

Транспортная задача — одна из классических задач линейного программирования. Она решается в процессе рационализации поставок и оптимального планирования грузопотоков, организации работы транспортных предприятий.

Постановка задачи

Однородный груз сосредоточен в m пунктах отправления $A_1, \dots, A_m$ (поставщики) в количестве $a_1, \dots, a_m$ единиц соответственно. Необходимо их доставить в n пунктов назначения $B_1, \dots, B_n$ (потребители), причём в количестве $b_1, \dots, b_n$ единиц соответственно.

Мы принимаем условие:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (1)$$

означающее, что суммарный запас груза равен суммарной потребности в нём.

Такая модель называется **закрытой**.

Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от поставщика A_i к потребителю B_j . Требуется найти оптимальный план перевозок, то есть рассчитать, сколько груза должно быть отправлено из каждого пункта отправления и в какой пункт назначения, и при этом суммарная стоимость перевозок была наименьшей. Все грузы должны быть вывезены и все потребности должны быть удовлетворены.

710

Неизвестными в этой задаче являются m неотрицательных чисел $x_{ij} \geq 0$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) — количество единиц груза, запланированных к перевозке из пункта A_i в пункт B_j :

$$A_i \xrightarrow{x_{ij}} B_j$$

Условие и схему решения транспортной задачи обычно записывают в виде таблицы, называемой **матрицей планирования** (или матрицей перевозок).

Потребители	B_1	$\dots$	B_n	Запасы
Поставщики				
A_1	c_{11}	$\dots$	c_{1n}	a_1
	x_{11}		x_{1n}	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	c_{m1}	$\dots$	c_{mn}	a_m
	x_{m1}		x_{mn}	
Потребности	b_1	$\dots$	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Математическая модель задачи

Система ограничений состоит из $(m+n)$ уравнений.

Все грузы должны быть вывезены:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, 1 \leq i \leq m \quad (2)$$



Аль-Хорезми, Мухаммад
ибн Муса (787–850 гг.)

711

Pages 710–711 of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

Глава 16.

История развития алгебры

При изучении любой научной или учебной темы важна актуализация её истории. Мы тоже приводили подходящие исторические данные к некоторым алгебраическим темам. Но надо признать, что мы не можем претендовать на полное изложение как всей алгебры, так и её богатой фактами истории.

А нужно ли вообще интересоваться тем, что происходило в алгебре тысячи лет назад, и тратить время на изучение её истории? Мы считаем, что история алгебры даёт примеры удивительных достижений людей и открытий творцов науки, которые ценны не только для математики, но и для всей человеческой культуры. Забыть их было бы вопиющей неблагодарностью.

В современных программах и учебниках алгебры её истории редко уделяют внимание. Мало кто знает истории и определение её предмета. Между тем, изучение истории позволяет решать многие мировоззренческие и методические задачи.

Например, любой школьник из учебников геометрии знает, что «геометрия» — это «землемерие», и её первыми обосновали древние греки. А вот про арабские корни «алгебры» почти ничего не сообщается. При этом их различное происхождение ощущается даже в школьном курсе математики. Скажем сразу же, что происхождение термина «алгебра» связывают с сочинением **Мухаммеда ибн Мусы аль-Хорезми**

721



Аль-Хорезми, Мухаммад
ибн Муса (787–850 гг.)

Pages 720–721 of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

В XIX веке российские математики внесли существенный вклад в математику, в том числе и в алгебру.

Лобачевский Николай Иванович (1792–1856) — великий русский математик, гениальный геометр, творец неевклидовой геометрии. Вся его жизнь связана с Казанским университетом. Лобачевский внёс большой вклад и в другие области математики. Он дал общее определение функциональной зависимости, позже введённой Дирихле. В своей книге «Алгебра, или исчисление конечных» (1834) он дал метод приближённого вычисления корней алгебраических уравнений высших степеней («метод Лобачевского»). Также он внёс значительный вклад в теорию определителей.



Лобачевский,
Николай Иванович
(1792–1856 гг.)

Во главе русской математики середины и второй половины XIX века стоял **Пафнутий Львович Чебышёв** (1821–1894), основатель Петербургской математической школы. Большое число работ учёного посвящено теории чисел. Он установил асимптотический закон распределения простых чисел. Его именем названы полиномы, наименее отклоняющиеся от нуля («полиномы Чебышёва»).

В первой половине XX века возникла концепция аксиоматического построения всей математики. Согласно этой

концепции, «*в основе всей математики лежит чистая теория множеств*» (А. Кольмогоров). Немецкий математик **Эрст Пөрмело** (1871–1953) дал первую систему аксиом теории множеств (1908), она включала 7 аксиом. Позже была аксиоматизирована алгебра и многие другие математические теории.

В двадцатые годы XX века алгебра бурно развивалась. Она перестраивалась по образцу теории групп, становясь учением об алгебраических системах. Изменился предмет алгебры — теперь она изучает алгебраические системы. Прежняя наука о решении алгебраических уравнений осталась лишь разделом в современной алгебре. Новую постановку алгебраических проблем дал немецкий математик **Эрст Штайни** (1871–1928) в своём мемуре «Алгебраическая теория полей» (1910).

В конце тридцатых годов XX века группа французских математиков объединилась, чтобы построить всю математику на аксиоматической основе. Результатом их деятельности стал многотомный трактат «Элементы математики» (1939), изданный под псевдонимом **Никола Бурбаки**, фундаментом которого была теория множеств.

В течение века произошла алгебраизация всей математики. Среди тех, кто в значительной степени способствовал этому процессу, стоит отметить немецкого математика **Эми Пётер** (1882–1935), создавшего «абстрактную алгебру» (учебник «Современная алгебра», 1931), и её ученика, голландского математика и историка математики **Бартеля Леендерта ван дер Вардена** (1903–1996) (образцовый учебник общей алгебры

748

749

Pages 748–749 of The Mathematician's Bible: Fundamentals of Higher and Linear Algebra (2024). · [Source](#)

P. S. You can also explore my other major work, [History of Mathematics](#). I described it in detail in [“History of Mathematics: For True Mathematicians”](#).