



Гильмуллин, М. Ф. История развития алгебры. Часть III. Период современной алгебры // Математика с Мансур-абый. 2025. URL: <https://history-math.org/ru/publications/hm-tt-09e42f3b7de4-ru/>. Дата публикации: 02.02.2025.

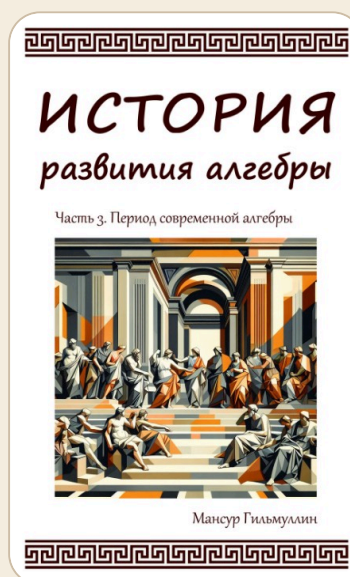
ОЧЕРК

История развития алгебры. Часть III. Период современной алгебры

Рассмотрим достижения периода современной алгебры. Этот период продолжается с середины XIX века по нынешний день.

Мансур Гильмуллин · 02.02.2025 · RU

[Статья на сайте журнала](#)



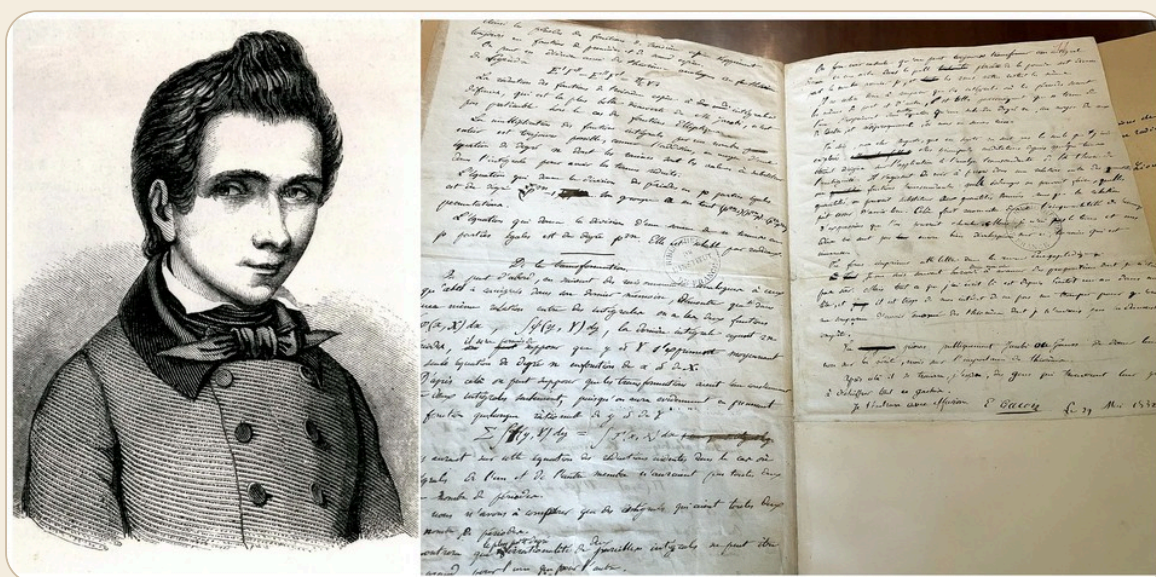
· [Источник](#)

Завершим краткий цикл повествований об истории развития алгебры рассмотрением персоналий и хронотопа (времени и места) достижений периода современной алгебры. Он продолжается с середины XIX века по нынешний день.

Среди основоположников современной алгебры первым называют гениального французского математика [Эвариста Галуа](#) (1811–1832). Он получил основные результаты теории алгебраических уравнений, впоследствии названной его именем («Теория Галуа»). В 1828–1830 годах Галуа написал ряд работ, наиболее значительные из них — «Анализ одного

мемуара об алгебраическом решении уравнений» (1830), где формулируются важные положения теории Галуа, и «Из теории чисел» (1830), где он построил теорию конечных полей.

Галуа повторил результат Н. Абеля о невозможности общего решения в радикалах алгебраических уравнений выше четвёртой степени. Он нашёл необходимое и достаточное условие, которому удовлетворяет уравнение, разрешимое в радикалах. Но наиболее ценным был даже не результат, а методы, с помощью которых удалось его получить. Решая эти задачи, Галуа заложил основы новой алгебры. Он ввёл такие фундаментальные понятия, как «группа», «подгруппа», «нормальный делитель» и «поле». Сам термин «группа» был впервые употреблён Галуа.



Слева: гравюра с изображением Эвариста Галуа (1811–1832), с рисунка сделанного его братом Альфредом Галуа по памяти, 1848. Справа: последняя страница письма Галуа к его другу, Огюсту Шевалье, от 29 мая 1832 г. В нём он излагает свои алгебраические открытия и в конце просит: «Ты публично попросишь Якоби или Гаусса дать их заключение, не о справедливости, но о важности этих теорем. После этого будут, я надеюсь, люди, которые найдут свою выгоду в расшифровке всей этой путаницы». Эта путаница содержала теорию групп — ключ к современной алгебре и геометрии. [Источник](#)

Гениальный норвежский математик [Нильс Хенрик Абель](#) (1802–1829) работал на стыке анализа и алгебры (1826–1829). Он окончательно решил проблему о неразрешимости уравнений выше четвёртой степени в радикалах. Абель показал, что уравнения с коммутативной группой подстановок корней разрешимы в радикалах. Поэтому коммутативные группы называются теперь «абелевыми». Его работы обусловили развитие теории групп Галуа.

Теория групп считается одним из выдающихся достижений математики XIX столетия, вместе с открытием неевклидовых геометрий, которые положили начало периода современной математики.

Начиная с середины XIX века, центр тяжести в алгебраических исследованиях постепенно перемещается с теории уравнений на изучение произвольных алгебраических операций. Дальнейший прогресс оказался возможным только после постепенного расширения и углубления понятия числа, а также в результате появления разнообразных примеров алгебраических операций над объектами иной природы, чем числа.

Явное выделение абстрактного понятия алгебраической операции было сделано в середине XIX века в связи с исследованиями природы комплексных чисел. Возникают алгебра логики Д. Буля, внешние алгебры Г. Грассмана, кватернионы У. Гамильтона. Матричное исчисление создаёт А. Кэли, а К. Жордан публикует большой трактат о группах подстановок.

Современная точка зрения на алгебру как на общую теорию алгебраических операций сформировалась в начале XX века под влиянием работ Д. Гильберта, Э. Штейница, Э. Артина, Э. Нётер и окончательно утвердилась с выходом в 1930 г. монографии Б. ван дер Вардена «Современная алгебра».

Природа множеств — носителей алгебраических операций — с точки зрения алгебры безразлична, и в этом смысле объектом изучения являются сами алгебраические операции. Фактическому изучению долгое время подвергались сравнительно немногие основные типы универсальных алгебр, естественно выделившиеся в ходе развития математики и её приложений, например группы, кольца и поля.

Далее алгебра решительно встала на аксиоматический и более абстрактный путь развития.

В XIX–XX веках объём задач, решаемых методами алгебры, чрезвычайно расширился. Появилось множество новых алгебраических теорий, невиданно расширились приложения алгебры. Были созданы как классические разделы высшей и линейной алгебры (теория групп, колец, полей, векторных пространств), так и их специальные разделы.

Векторные (линейные) пространства над полем можно трактовать как алгебры с одной бинарной операцией — сложением и набором унарных операций — умножений на скаляры из основного поля. Если за множество скаляров взять кольцо, то получается более широкое понятие «модуля». Изучению линейных пространств, модулей, а также их линейных преобразований и смежным вопросам посвящён важный раздел алгебры — линейная алгебра, частью которой являются сформировавшиеся ещё в XIX веке теория линейных уравнений и теория матриц. К линейной алгебре тесно примыкает полилинейная алгебра.

Первые работы по общей теории произвольных универсальных алгебр относятся к 30-м годам XX века и принадлежат Г. Биркгофу. В те же годы А. Мальцев и А. Тарский заложили основы теории моделей, то есть множеств с введёнными на них отношениями. В дальнейшем теория универсальных алгебр и теория моделей столь тесно переплелись между собой, что привели к возникновению новой дисциплины, пограничной между алгеброй и математической логикой, — теории алгебраических систем, изучающей множества с определёнными на них алгебраическими операциями и отношениями. Раздел алгебры, изучающий алгебраические системы, принято называть общей алгеброй (высшей или абстрактной алгеброй).

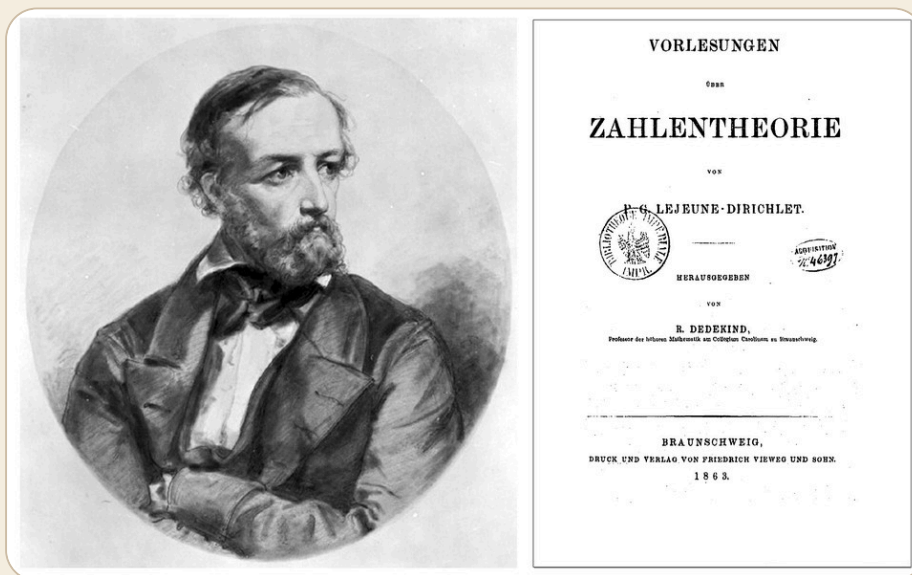
Ряд дисциплин, пограничных между алгеброй и другими частями математики, определяется внесением в универсальные алгебры дополнительных структур, согласованных с алгебраическими операциями. Сюда относятся топологическая алгебра, в том числе теория топологических групп и групп Ли, теория нормированных колец, теории различных упорядоченных алгебраических систем. К середине 50-х годов XX века оформилась в самостоятельную дисциплину гомологическая алгебра, уходящая своими истоками как в алгебру, так и в топологию.

Алгебраические методы стали решать задачи классификации во многих науках. Именно с помощью алгебры совершались последние крупные открытия в топологии. Алгебраические понятия и методы широко применяются в теории чисел, в функциональном анализе, в теории дифференциальных уравнений, в геометрии и в других математических дисциплинах.

Наряду с фундаментальной ролью внутри математики алгебра имеет большое прикладное значение. Следует отметить её выходы в физику (теория представлений конечных групп в квантовой механике, дискретные группы в кристаллографии), в кибернетику (теория автоматов), в математическую экономику (системы линейных неравенств, линейное программирование), в компьютерную алгебру, в науку о данных (англ. Data Science) и машинное обучение (англ. Machine Learning).

Хронотоп и персоналии периода современной алгебры

В 1870 году известный французский математик Камиль Жордан (1838–1922) написал книгу о теории подстановок («Трактат о подстановках и об алгебраических уравнениях»), отметив, что его работы — толкования рукописей Галуа. Этот труд — первый систематический курс теории групп и теории Галуа. Эта книга сделала теорию Галуа достоянием всей математики.



Слева: портрет Петера Густава Лежёна Дирихле (нем. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859). Справа: титульный лист «Лекций по теории чисел» под редакцией Р. Дедекинда (нем. Vorlesungen über Zahlentheorie), 1863 · [Источник](#)

Артур Кэли (1821–1895), английский математик, внёс существенный вклад в общую и линейную алгебру, заложил основы теории матриц (1858) и современной алгебраической геометрии. Кэли первым сформулировал определение группы в том виде, как она определяется сегодня — множество с ассоциативной и обратимой бинарной операцией.

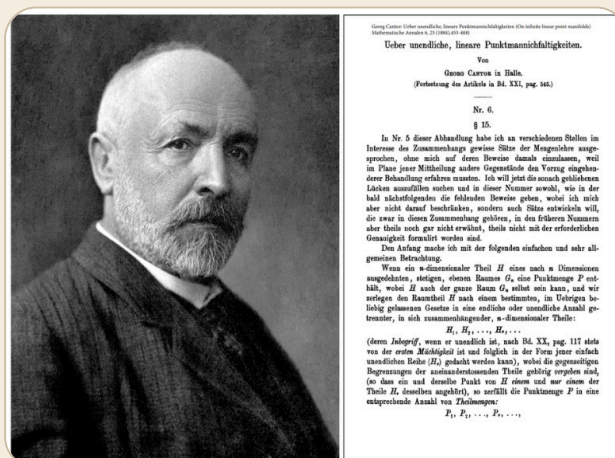
Преемником Гаусса в Гёттингене стал Петер Густав Лежён Дирихле (1805–1859), немецкий математик. Он сделал ряд крупных открытий в теории чисел. Его «Лекции по теории чисел» (1863) переведены на многие языки, многократно переиздавались и оказали значительное влияние на выдающихся математиков более позднего времени: Б. Римана, Л. Кронекера и Р. Дедекинда. Для решения задач теории чисел Дирихле применял аналитические функции.

Леопольд Кронекер (1823–1891), немецкий математик, профессор Берлинского университета, стал сторонником «арифметизации» математики. Основные работы Кронекера относятся к алгебре и теории чисел. В алгебре его именем называют критерий совместности системы линейных уравнений. Кроме того, он дал метод, с помощью которого можно разложить многочлен над полем рациональных чисел на неприводимые множители.

Рихард Дедекинд (1831–1916) — немецкий математик, ученик Гаусса и Дирихле, в трудах которого были заложены основы современной алгебры, изучающей группы, кольца, поля, структуры и модули. Именно он ввёл понятия кольца и идеала. Он одним из первых дал теоретико-множественное обоснование теории действительных чисел — теорию сечений Дедекинда («Непрерывность и иррациональные числа», 1872).

Дедекинд сформулировал полную систему аксиом арифметики (1888), её обычно называют «аксиоматикой Пеано», а также принцип полной математической индукции.

Георг Кантор (1845–1918) — немецкий математик, основоположник теории множеств («Основы общего учения о многообразиях», 1883), которая лежит ныне в основе математического анализа. Кантор разработал теорию бесконечных множеств, создал одну из строгих теорий действительных чисел, впервые сформулировал аксиому непрерывности, названную его именем. Теория Кантора послужила причиной общего пересмотра логических основ математики и оказала влияние на всю современную структуру математики.



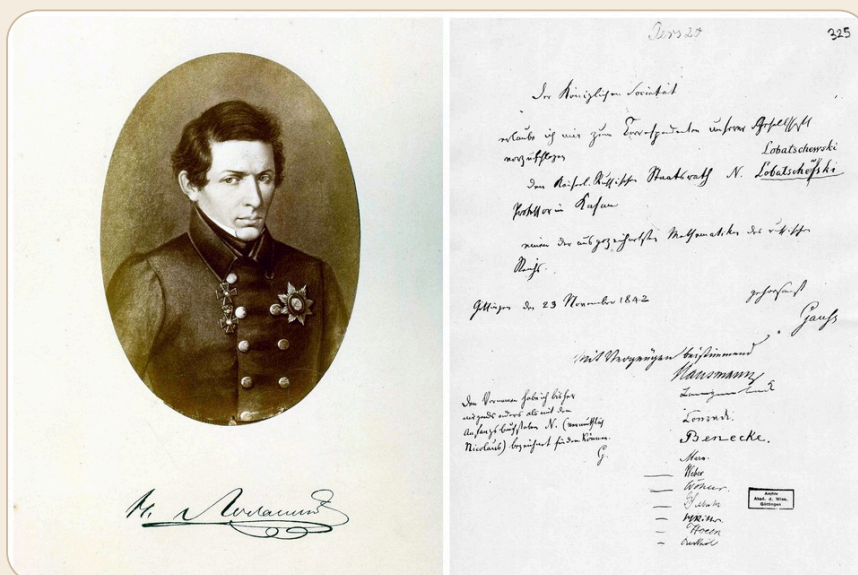
Слева: портрет Георга Кантора (нем. Georg Cantor, 1845–1918). Справа: первая страница статьи «О бесконечных линейных точечных многообразиях» (нем. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten) в журнале Mathematische Annalen, 1884 · [Источник](#)

В XIX веке российские математики внесли существенный вклад в математику, в том числе и в алгебру.

Лобачевский Николай Иванович (1792–1856) — великий русский математик, гениальный геометр, известен, прежде всего, как творец неевклидовой геометрии. Однако он внёс большой вклад и в другие области математики. Лобачевский дал общее определение функциональной зависимости, позже введённой Дирихле. В своей книге «Алгебра, или исчисление конечных» (1834) он предложил метод приближённого вычисления корней алгебраических уравнений высших степеней («метод Лобачевского»). Также он внёс значительный вклад в теорию определителей.

Вся жизнь Лобачевского была связана с Казанским университетом. Большую часть своей научной деятельности он занимался вопросами обоснования геометрии. Сначала пытался доказать пятый постулат Евклида о параллельных прямых и пришёл к убеждению, что он не зависит от остальных аксиом. Учёный впервые сообщил свою «воображаемую геометрию» в докладе «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных» (1826). В 1835 г. в «Учёных записках Казанского университета» были опубликованы мемуары «Воображаемая геометрия», а в 1835–1838 гг. — «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», где он дал полное и систематическое изложение новой геометрии.

Европа узнала о работах Лобачевского по брошюре «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (1840, Берлин). Гаусс высоко оценил это открытие. По его представлению, Лобачевский был избран членом-корреспондентом Гёттингенского научного общества как один из «самых выдающихся математиков Российской империи».



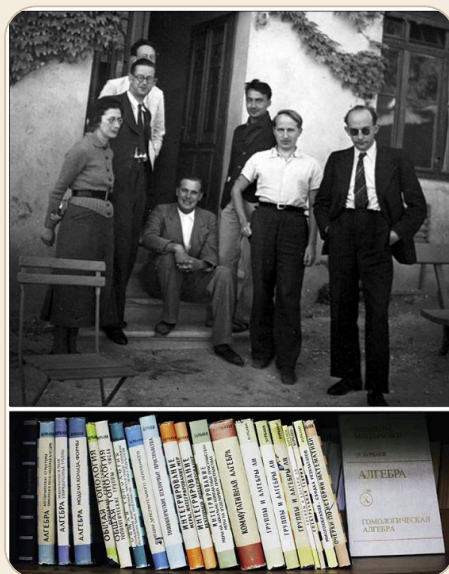
Слева: портрет Николая Ивановича Лобачевского (1792–1856) с его подписью. Справа: письмо К. Ф. Гаусса от 23 ноября 1842 г. в Королевское общество наук Гёттингена с представлением Н. И. Лобачевского в члены-корреспонденты. Письмо гласит: «Королевскому обществу. Позволю себе предложить в корреспонденты нашего общества русского имперского статского советника Н. Лобачевского, профессора из Казани, одного из самых выдающихся математиков русского государства. С преданностью, Гаусс» · [Источник](#)

Во главе русской математики середины и второй половины XIX века стоял Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894), основатель Петербургской математической школы. Большое число работ учёного посвящено теории чисел. Он установил асимптотический закон распределения простых чисел. Его именем названы полиномы, наименее отклоняющиеся от нуля («полиномы Чебышёва»).

В первой половине XX века возникла концепция аксиоматического построения всей математики. Согласно этой концепции, «в основе всей математики лежит чистая теория множеств» (А. Колмогоров). Немецкий математик Эрнст Цермело (1871–1953) дал первую систему аксиом теории множеств (1908), она включала 7 аксиом. Позже была аксиоматизирована алгебра и многие другие математические теории.

В двадцатые годы XX века алгебра бурно развивалась. Она перестраивалась по образцу теории групп, становясь учением об алгебраических системах. Изменился предмет алгебры — теперь она изучает алгебраические системы. Прежняя наука о решении алгебраических уравнений осталась лишь разделом в современной алгебре. Новую постановку алгебраических проблем дал немецкий математик Эрнст Штайниц (1871–1928) в своём мемуаре «Алгебраическая теория полей» (1910).

В конце тридцатых годов XX века группа французских математиков объединилась, чтобы построить всю математику на аксиоматической основе. Результатом их деятельности стал многотомный трактат «Элементы математики» (1939), изданный под псевдонимом Никола Бурбаки, фундаментом которого была теория множеств.



Сверху: фотография собрания группы «Бурбаки» в Дельфи в 1938 г. Слева направо: Симона Вейль (философ, сестра А. Вейля), Шарль Пизо, Андре Вейль, Жан Дьёдонне (сидит), Клод Шабати, Шарль Эресманн и Жан Дельсарт. Снизу: полный комплект книг Бурбаки Н. «Элементы математики», который переведён на русский язык и состоит из 21 тома · Источник

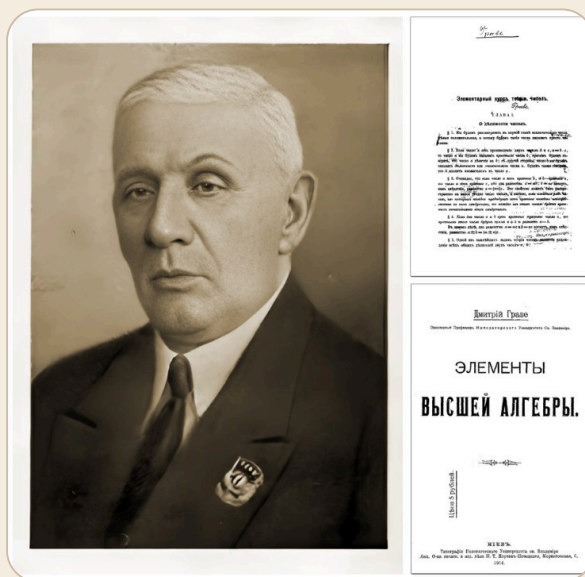
В течение века произошла алгебраизация всей математики. Среди тех, кто в значительной степени способствовал этому процессу, стоит отметить немецкого математика Эмми Нётер (1882–1935), создавшую «абстрактную алгебру» (учебник «Современная алгебра», 1931), и её ученика, голландского математика и историка математики Бартеля Леендерта ван дер

Вардена (1903–1996) (образцовый учебник общей алгебры «Современная алгебра», 1930). Э. Нётер — самая известная женщина-математик XX века, профессор Гёттингенского университета. Она читала абстрактную алгебру и алгебраическую геометрию в Московском университете в 1928–1929 гг.



Слева: портрет Амалии Эмми Нётер (нем. Amalie Emmy Noether, 1882–1935). Справа: фотография Бартеля Леендерта ван дер Вардена (нидерл. Bartel Leendert van der Waerden, 1903–1996) · [Источник](#)

Особо следует отметить первую русскую алгебраическую школу, созданную в десятилетия XX века в Киевском университете Дмитрием Александровичем Граве (1863–1939). Граве сосредоточился на новой алгебре и теории чисел. Специальный семинар по теории групп, основанный им, превратился в научную школу, членами которой были Б. Делоне, Н. Чеботарёв и О. Шмидт. В 1909 г. Граве издал известную книгу «Элементарный курс теории чисел», в 1914 г. — фундаментальный труд «Элементы высшей алгебры».



Слева: фотография Дмитрия Александровича Граве (1863–1939). Справа: первая страница книги «Элементарный курс теории чисел» (1909) и титульный лист книги «Элементы высшей алгебры» (1914) · [Источник](#)

Советские алгебраисты, которые интенсивно занимались проблемами современной алгебры, в двадцатые годы сгруппировались вокруг академика Отто Юльевича Шмидта (1891–1956), который ещё в 1916 г. опубликовал монографию «Абстрактная теория групп». С 1923 г. Шмидт работал в Московском университете, руководил кафедрой алгебры.

Борис Николаевич Делоне (1890–1980) занимался вопросами новой алгебры и теорией алгебраических чисел.

Николай Григорьевич Чеботарёв (1894–1947) — крупнейший советский алгебраист. Занимался вопросами теории алгебраических чисел, теории Галуа, групп Ли. Работал в Киеве и Одессе, с 1927 г. в Казани, заведовал кафедрой алгебры КГУ. Создал известную Казанскую алгебраическую школу. Автор известных монографий «Теория Галуа» (1934, 1937) и «Теория групп Ли» (1940). Ученики Чеботарёва, работая в разных областях алгебры, расширили научные достижения Казанской школы алгебраистов. Например, Владимир Владимирович Морозов (1910–1975) успешно решил проблему перечисления всех примитивных представлений простых групп Ли (1938). Анатолий Васильевич Дороднов (1908–1989) полностью решил знаменитую задачу Гиппократов о квадратуемых луночках.

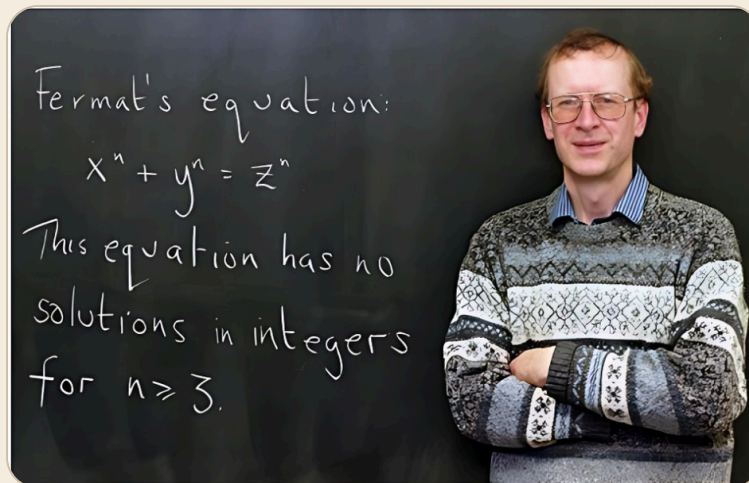


Слева: фотография Николая Григорьевича Чеботарёва (1894–1947). Справа: титульные листы монографий «Основы теории Галуа» (1934) и «Теория групп Ли» (1940) · [Источник](#)

Важные результаты были получены и в теории чисел. В аналитической теории чисел основные достижения связаны с работами Ивана Матвеевича Виноградова (1891–1983).

В течение XIX–XX веков, а также в настоящее время исследования по теории чисел приобрели всё увеличивающийся размах. Возврат к этим исследованиям определяется теперь потребностями цифровых технологий.

Были решены также и некоторые классические задачи. Например, английский математик Эндрю Уайлс окончательно доказал (1995) «Великую теорему Ферма» (диофантово уравнение $x^n + y^n = z^n$ неразрешимо в целых положительных значениях x, y, z , если $n > 2$), закрыв эту многовековую проблему.



Фотография сэра Эндрю Уайлса (англ. Sir Andrew J. Wiles), британского математика из Оксфорда, который окончательно доказал (1995) Великую теорему Ферма с использованием полустабильных эллиптических кривых · [Источник](#)

Решены также некоторые из алгебраических «Проблем Гильберта»: 5-я «*Все непрерывные группы являются группами Ли*» (1953), 7-я «*Число $2^{\sqrt{2}}$ (постоянная Гельфонда-Шнайдера) является трансцендентным*» (1930), 10-я «*Универсального алгоритма решения диофантовых уравнений не существует*» (1970), 18-я «*Число кристаллографических (фёдоровских) групп конечно*» (1911).

Алгебра находится в состоянии динамичного развития. Большие заслуги в этом принадлежат и математикам нашей страны. [Колмогоров Андрей Николаевич](#) (1903–1987) — один из выдающихся советских математиков. Он внёс основополагающий вклад в теорию множеств, теорию вероятностей, статистику, теорию информации, теорию сложности алгоритмов и алгебраическую топологию. Также он занимался вопросами истории и обоснования математики. Его известные работы: «Математика в её историческом развитии», «О профессии математика», «Математика — наука и профессия». В истории математики принято ссылаться на определение предмета математики и её периодизацию, данную А. Колмогоровым. Он полагал, что сформулировать адекватное формальное определение предмета математики невозможно, и дал определение через её историю.



Слева: фотография Андрея Николаевича Колмогорова (1903–1987). Справа: обложки сборников работ посвящённых вопросам истории и обоснования математики: «Математика в её историческом развитии», «Математика — наука и профессия» · [Источник](#)

Отметим вклад в алгебру и других известных советских и российских учёных: Каргаполов Михаил Иванович (1928–1976), Кострикин Алексей Иванович (1929–2000), Мальцев Анатолий Иванович (1909–1967), Манин Юрий Иванович (1937–2023), Новиков Пётр Сергеевич (1901–1975), Фаддеев Дмитрий Константинович (1907–1989), Шафаревич Игорь Ростиславович (1923–2017), Шеврин Лев Наумович (1935–2021).

На этом заканчиваем краткий очерк, посвящённый истории развития алгебры. Прогнозы развития науки в ближайшие десятилетия трудно сформулировать. Нельзя ожидать, что классические разделы алгебры будут оставаться основным источником новых идей. Ещё продолжаются работы по решению давно поставленных проблем.

С другой стороны, между теорией универсальных алгебр и классическими разделами алгебры и теории чисел существует большое необработанное пространство. Например, частью этого пространства является компьютерная алгебра, исследующая алгебраические алгоритмы и их сложность.

Вместе с тем необходимо создавать и новые алгебраические теории, которые будут решать проблемы, возникающие на стыке математических и нематематических наук. Алгебра играет ту же роль, что и язык в общении человека с внешним миром. Насколько важно научиться языку алгебры, можно понять, лишь попробовав обойтись без него в самостоятельных занятиях математикой. Поэтому желаем всем развития своего алгебраического вкуса. Пусть между духом и материей посредником выступает алгебра.



Читайте книгу Гильмуллина М. Ф. «Библия математика. Основы высшей и линейной алгебры» (2024). Её можно найти на сайте издательства Ridero.ru через поиск: «Гильмуллин Библия математика». Она включает в себя главу 16: «История развития алгебры», по материалам которой написана эта статья · [Источник](#)

«Гильмуллин Библия математика»