



Гильмуллин, М. Ф. Последовательность Фарея // Математика с Мансур-абый. 2024. URL: <https://history-math.org/ru/publications/hm-tt-0ba0b6281b22-ru/>. Дата публикации: 26.10.2024.

ОЧЕРК

Последовательность Фарея

«Последовательности Фарея» — семейство конечных подмножеств рациональных чисел с особыми, математически красивыми, свойствами.

Мансур Гильмуллин · 26.10.2024 · RU

[Статья на сайте журнала](#)



Силуэт Джона Фарея, нарисованный его другом Уайтом Уотсоном. Хранится в Музее и художественной галерее Дерби, Англия · [Источник](#)

«Последовательности Фарея» (Farey sequence, или ряды Фарея, дроби Фарея, таблица Фарея) — семейство конечных подмножеств рациональных чисел с особыми, математически красивыми, свойствами.

Последовательность Фарея n -го порядка — возрастающая последовательность F_n всех неотрицательных несократимых дробей, не превосходящих 1, знаменатели которых меньше или равны n . Дроби $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$ считаются первым и

последним элементами F_n .

$$F_n = \left\{ \frac{a}{b} \mid 0 \leq a \leq b \leq n, \gcd(a, b) = 1 \right\}$$

Дроби располагаются в порядке возрастания:

$$\frac{a_i}{b_i} < \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$$

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$$

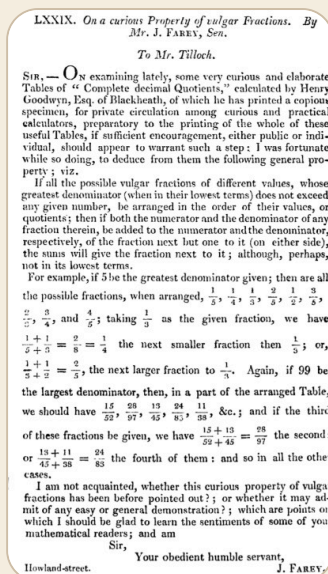
$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Определение множества F_n и последовательности Фарея до $n = 5$

Джон Фарей (1766–1826, John Farey) — английский геолог, писатель. Один из пионеров геофизики. Автор многочисленных научных работ в области геологии, метрологии, садоводства, музыки. Его единственным вкладом в математику были дроби, названные его именем. Это результат его исследований математики звука.

В 1816 году была опубликована краткая статья Фарея «Об интересном свойстве обыкновенных дробей», в которой он определил последовательность F_n .



Страница из статьи Фаррея «Об интересном свойстве обыкновенных дробей» ("On a curious property of vulgar fractions". The Philosophical Magazine and Journal: Comprehending the various branches of science. the liberal and fine arts, geology, agriculture, manufacturers and commerce., vol. 47, no. 3, pp. 385–386, 1816) · [ИСТОЧНИК](#)

Эта статья дошла до французского математика О. Л. Коши, который в том же году опубликовал доказательство гипотезы Фаррея о том, что каждый новый член последовательности Фаррея порядка n является медиантой своих соседей.

Понятие медианты двух дробей введено А. Я. Хинчиным в теории цепных дробей. Медианта двух обыкновенных дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равна отношению суммы их числителей к сумме знаменателей: $\frac{a+c}{b+d}$.

Последовательность Фаррея порядка $n + 1$ можно построить рекурсивно из последовательности порядка n по следующему правилу:

1. Копируем все элементы последовательности порядка n .
2. Если сумма знаменателей в двух соседних дробях последовательности порядка n даёт число не большее, чем $n + 1$, то вставляем между этими дробями их медианту.

Давайте проделаем небольшой эксперимент и получим опыт работы с последовательностями Фаррея. Вот пробные задания для этого:

1. Попробуйте самостоятельно построить последовательность F_6 .
2. Докажите, что если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ — две соседние дроби в последовательности Фаррея F_n , то $bc - ad = 1$. Справедливо и обратное утверждение: если дроби $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ таковы, что $bc - ad = 1$, то они представляют собой соседние члены ряда Фаррея F_n , где $n = \max(b, d)$.
3. Медианта двух дробей обладает таким замечательным свойством: она лежит между ними. Попробуйте это доказать.
Если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.
4. Всех несократимых дробей со знаменателями, равными n , имеется в точности $\varphi(n)$ (это известная в теории чисел функция Эйлера). Обозначив через L_n длину последовательности F_n , получим рекуррентное соотношение:

$$L_n = L_{n-1} + \varphi(n).$$

У последовательностей Фарея очень много интересных приложений, в том числе в олимпиадной математике. Существуют различные алгоритмы генерации всех дробей F_n , которые исследуются в информатике. Также последовательности Фарея дают интересные темы и для научно-исследовательских работ.

Ответы

1. Ответ:

$$F_6 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right\}.$$

1. Доказательство прямой теоремы индукцией по n .

$n = 1$, F_1 состоит из пары $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$.

$$1 \times 1 - 0 \times 1 = 1$$

Оценим шаг индукции при переходе из n в $n + 1$.

Пусть $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ и $bc - ad = 1$. При переходе в следующую последовательность Фарея между ними вставляется медианта $\frac{a+c}{b+d}$. Докажем, что искомое соотношение выполняется и для новых пар.

• Пара $\frac{a}{b}$ и $\frac{a+c}{b+d}$:

$$b(a+c) - a(b+d) = bc - ad = 1$$

• Пара $\frac{a+c}{b+d}$ и $\frac{c}{d}$:

$$(b+d)c - (a+c)d = bc - ad = 1$$