



Гильмуллин, М. Ф. Последовательности Рачинского // Математика с Мансур-абый. 2024. URL: <https://history-math.org/ru/publications/hm-tt-452593011bea-ru/>. Дата публикации: 21.12.2024.

ОЧЕРК

Последовательности Рачинского

Многие любители математики знают картину Н. П. Богданова-Бельского «Устный счёт. В народной школе С. А. Рачинского» (1895).

Мансур Гильмуллин · 21.12.2024 · RU

[Статья на сайте журнала](#)



Картина (1895) Н. П. Богданова-Бельского «Устный счёт. В народной школе С. А. Рачинского» · [Источник](#)

Многие любители математики знают картину Н. П. Богданова-Бельского «Устный счёт. В народной школе С. А. Рачинского» (1895).

На картине изображён известный народный учитель, просветитель, профессор Московского университета, ботаник и математик [Сергей Александрович Рачинский](#) вместе со своими учениками.

В 70-х годах XIX века Рачинский на волне движения народничества оставил свою карьеру, жильё в Москве, работу профессора, и уехал в родное село Татёво в Смоленской губернии (ныне Тверской области). Он до конца жизни преподавал математику и другие предметы в народной школе для крестьянских детей. Рачинский разработал уникальную методику обучения устному счёту, прививая деревенским ребятишкам основы математического мышления. Художник Богданов-Бельский, кстати, был одним из его учеников.

На доске написана арифметическая задача на устный счёт:

$$(10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2) \div 365$$

Эту задачу можно решить несколькими способами.

Попробуйте сначала решить её устно, в уме.

А для приобретения опыта решения подобных задач, мы вам предлагаем ещё один красивый метод «последовательностей Рачинского», который он придумал самостоятельно и использовал для создания задач на устный счёт.

Посмотрите внимательно на числовые тождества Рачинского и постарайтесь заметить закономерности, заложенные в них:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 = 25$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2 = 2030$$

1) В каждом тождестве используется нечётное количество подряд идущих натуральных чисел (Обозначим это количество $2k + 1$, через n — первое число. Тогда это числа $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 2k$).

2) Сумма квадратов первых $k + 1$ чисел равна сумме квадратов последних k чисел:

$$n^2 + (n + 1)^2 + \dots + (n + k)^2 = (n + k + 1)^2 + \dots + (n + 2k)^2$$

Такая последовательность натуральных чисел называется «последовательностью Рачинского».

На первый взгляд никакая закономерность (какая связь между числами n и k , чему равна сумма левых и правых частей у разных тождеств) не проглядывается.

Но эту закономерность можно найти, используя алгебраические уравнения.

При $k = 1$ получается уравнение: $n^2 + (n + 1)^2 = (n + 2)^2$, откуда следует квадратное уравнение $n^2 - 2n - 3 = 0$. Его корни $n = 3$, $n = -1$.

При $n = 3$ получается первая последовательность Рачинского из трёх чисел: $3^2 + 4^2 = 5^2 = 25$.

При $n = -1$ (но это число не натуральное) получается тождество $1 = 1$.

Аналогично исследуются следующие уравнения.

При $k = 2$: $n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = (n + 3)^2 + (n + 4)^2$, $n^2 - 8n - 20 = 0$. Его корни $n = 10$, $n = -2$.

При $n = 10$ получается вторая последовательность Рачинского из пяти чисел:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365.$$

Именно она и используется для решения задачи на картинке: $(365 + 365)/365 = 2$.

Далее предлагаем самостоятельно построить последовательность Рачинского из семи чисел:

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2 = 2030$$

Ну и решите общие вопросы:

1) Найдите квадратное уравнение, положительный корень n которого выражается явно через k и даёт последовательность Рачинского из $2k + 1$ чисел.

Это означает, что для заданного целого $k \geq 1$ существует только одна последовательность Рачинского.

2) Докажите, что последовательные разности чисел $n = n(k)$ образуют арифметическую прогрессию с разностью 4.

3) Найдите выражения $S(k)$, выражающие левую и правую часть k -го тождества Рачинского: $S(k) = n^2 + (n + 1)^2 + \dots + (n + k)^2$.

Прежде чем смотреть решение ниже, попытайтесь всё же найти ответы самостоятельно! :)

Решение

$$n^2 + \sum_{j=1}^k (n + j)^2 = \sum_{j=1}^k (n + k + j)^2$$

$$n^2 + \sum_{j=1}^k (n^2 + 2nj + j^2) = \sum_{j=1}^k ((n + k)^2 + 2(n + k)j + j^2)$$

$$(k+1)n^2 + 2n \sum_{j=1}^k j + \sum_{j=1}^k j^2 = k(n+k)^2 + 2n \sum_{j=1}^k j + 2k \sum_{j=1}^k j + \sum_{j=1}^k j^2$$

Сократим обе части на одинаковые члены

$$2n \sum_{j=1}^k j + \sum_{j=1}^k j^2$$

Используем известную формулу:

$$\sum_{j=1}^k j = \frac{1}{2}k(k+1)$$

$$(k+1)n^2 = k(n+k)^2 + k^2(k+1)$$

Получим квадратное уравнение:

$$n^2 - 2nk^2 - k^2(2k+1) = 0$$

Его корни:

$$n = 2k^2 + k \quad \text{или} \quad n = -k$$

При $n = 2k^2 + k$ получим искомую последовательность Рачинского из $2k+1$ натуральных чисел. Случай $n = -k$ не рассматривается, так как это не натуральное число.

1. Полученное тождество:

$$n^2 + (n+1)^2 + \dots + (n+k)^2 = (n+k+1)^2 + \dots + (n+2k)^2.$$

2) Используя выведенную формулу $n = 2k^2 + k = k(2k+1)$ зависимости между числами n и k , составим разность $2k^2 + k - (2(k-1)^2 + (k-1)) = 4k - 1$.

Это и означает, что последовательные разности чисел $n = n(k)$ образуют арифметическую прогрессию с разностью 4.

В самом деле, $10 - 3 = 7$, $21 - 10 = 11$, $36 - 21 = 15$, ...

При этом при необходимости легко вычислить последовательно по рекуррентной формуле первые числа тождеств: $n_k = n_{k-1} + 4k - 1$.

Например, $n_4 = n_3 + 16 - 1 = 21 + 15 = 36$.

Но легче использовать формулу $n = k(2k + 1) = 4(8 + 1) = 36$.

Используя эту формулу, легко построить последующие тождества Рачинского. Например, при $k = 4$, тождество для девяти чисел:

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 = 7230$$

3) $S(k) = n^2 + (n + 1)^2 + \dots + (n + k)^2$, где $n = 2k^2 + k$.

Понадобится известная формула для суммы квадратов первых k чисел:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = k(k + 1)(2k + 1)/6$$

Получим следующую формулу:

$$S(k) = (24k^5 + 60k^4 + 50k^3 + 15k^2 + k)/6$$

или

$$S(k) = k(k + 1)(24k^3 + 36k^2 + 14k + 1)/6$$