



Гильмуллин, М. Ф. Рождественская теорема Ферма // Математика с Мансур-абый. 2024. URL: <https://history-math.org/ru/publications/hm-tt-4c57329c14a2-ru/>. Дата публикации: 21.12.2024.

ОЧЕРК

Рождественская теорема Ферма

В истории математики есть много замечательных достижений и проблем, связанных с именем «великого дилетанта» математики — Пьера де Ферма...

Мансур Гильмуллин · 21.12.2024 · RU

[Статья на сайте журнала](#)



· [Источник](#)

В истории математики есть много замечательных достижений и проблем, связанных с именем «великого дилетанта» математики — [Пьера де Ферма](#) (1601–1665), основоположника алгебраической теории чисел, юриста из Тулузы. Одним из них является замечательная «Рождественская теорема Ферма».



Портрет Пьера де Ферма (1601–1665), французский математик-самоучка, основоположник алгебраической теории чисел · [Источник](#)

Она гласит:

«Любое простое число p вида $p = 4n + 1$, где n — натуральное число, представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел».

Иначе говоря, существуют натуральные числа x и y , такие что $p = x^2 + y^2$.

Другие названия этой теоремы — «Теорема Ферма — Эйлера», «Теорема о представлении простых чисел в виде суммы двух квадратов».

Примеры

$$\begin{aligned}5 &= 1^2 + 2^2 \\13 &= 2^2 + 3^2 \\17 &= 1^2 + 4^2 \\29 &= 2^2 + 5^2 \\37 &= 1^2 + 6^2\end{aligned}$$

Это утверждение называют «Рождественская теорема Ферма», так как она стала известна из письма Пьера Ферма, посланного 25 декабря 1640 года.

Вот чем занимаются математики в Рождество!

Историческая справка

Впервые это утверждение обнаружено у голландского математика Альбера Жирара в 1632 году. Пьер Ферма объявил в своём письме к Мерсенну (1640), что он доказал данную теорему, однако доказательства не привёл. Через 20 лет в письме к Пьеру Каркави (от августа 1659 года) Ферма намекает, что доказательство основывается на методе бесконечного спуска.

Первое опубликованное доказательство методом бесконечного спуска было найдено Леонардом Эйлером между 1742 и 1747 годами (через 100 лет). Позднее доказательства, основанные на других идеях, дали Жозеф Лагранж, Карл Гаусс, Герман Минковский и Дон Цагир. То есть, оно оказалось не совсем очевидным.

Из «Рождественской теоремы Ферма» при помощи тождества Брахмагупты выводится более общее утверждение:

Натуральное число представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда ни одно простое число вида $4n + 3$ не входит в его разложение на простые множители в нечётной степени.

Иногда именно этот факт подразумевается под теоремой Ферма–Эйлера.

Примечания

Метод бесконечного спуска — метод доказательства от противного, основанный на том, что множество натуральных чисел вполне упорядочено. Был существенно развит Пьером Ферма.

Он часто используется для доказательства того, что у некоторого уравнения нет решений по следующей схеме. Из предположения, что решение существует, доказывается существование другого решения, которое в некотором смысле меньше, тогда можно построить бесконечную цепочку решений, каждое из которых меньше предыдущего. Это вызывает противоречие с тем, что в любом непустом подмножестве натуральных чисел есть наименьший элемент. Значит, предположение о существовании начального решения неверно.

Пример. Доказательство иррациональности квадратного корня из 2 можно провести с использованием метода бесконечного спуска. Для этого первоначально оно предполагается рациональным числом.

Тождество Брахмагупты–Фибоначчи, называемое также тождеством Брахмагупты или тождеством Диофанта, — алгебраическое тождество, показывающее, как произведение двух сумм квадратов можно представить в виде суммы квадратов (причём двумя способами):

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

О «Рождественской теореме Ферма», в том числе о её доказательствах, подробнее можно узнать в следующей литературе:

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966. — 384 с.
2. Мерзон Г. Рождественская теорема Ферма и Крылатые квадраты Спивака // Квантик. — 2022. — №5 — С 14–22.
3. Сендеров В., Спивак А. Суммы квадратов и целые гауссовы числа // Квант. — 1999. — №3 — С 14–22.
4. Dickson L. E. History of the Theory of Numbers // Vol. II. — Ch. VI. Sum of two squares.