



Гильмуллин, М. Ф. Кризисы в развитии математики // Математика с Мансур-абый. 2023. URL: <https://history-math.org/ru/publications/hm-tt-936fd901871e-ru/>. Дата публикации: 22.11.2023.

ОЧЕРК

## Кризисы в развитии математики

В статье разберём, что такое кризис в науке, а также были ли (и есть ли теперь) кризисы в математике.

Мансур Гильмуллин · 22.11.2023 · RU

[Статья на сайте журнала](#)



Условное символическое изображение трёх кризисов математики: проблемы несоизмеримости, бесконечно малых величин и меры бесконечности. Первые два кризиса успешно преодолены, а третий продолжается и по сегодняшний день · [Источник](#)

В статье разберём, что такое кризис в науке, а также были ли (и есть ли теперь) кризисы в математике.

Для начала определим, что понимается под кризисом в науке. Кризис необходимо принимать как категорию философии науки. Это ситуация, в которой научное сообщество ставит под сомнение методологические основания данной науки. В этой ситуации разрушаются устойчивые стереотипы восприятия научных данных, их допустимых объяснений. Причиной кризиса может стать возникновение аномалий, их осознание как примеров, противоречащих

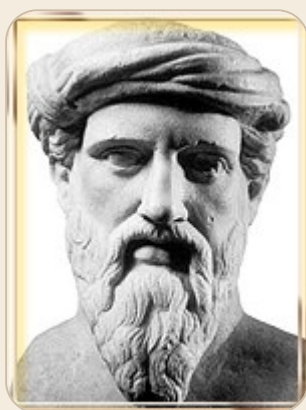
общепризнанной теории. Большей частью эти противоречия порождаются неспособностью науки на данном этапе объяснить возникшие затруднения. Выход из кризисной ситуации будет означать нахождение методов и средств объяснения этих затруднений.

В истории и философии математики чаще всего говорят о трёх кризисах.

## Первый кризис

Его условно можно назвать древнегреческим. Именно в Древней Греции математика начала превращаться в теоретическую (дедуктивную) науку с аксиомами, теоремами и доказательствами (VI–V века до н. э., пифагорейская школа).

«Всё есть число»: числа приобретают мистический смысл. Всё происходящее в мире старались свести к числовой гармонии. Эта гармония нарушилась, когда обнаружилось явление несоизмеримости некоторых отрезков. До этого времени считалось, что все отрезки соизмеримы, то есть отношение их длин можно выразить в виде обыкновенной дроби. Пифагорейцы открыли, что отношение диагонали и стороны квадрата невозможно так представить.

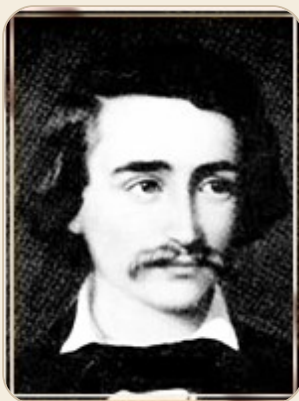


Пифагор Самосский (570–490 гг. до н. э.) · [Источник](#)

Перед пифагорейцами открылись две возможности. Можно было попытаться расширить понятие числа за счёт присоединения к рациональным числам чисел иррациональных, охарактеризовать несоизмеримые величины числами иной природы и таким образом восстановить силу своего принципа «Всё есть число». Однако пифагорейцы не смогли объяснить это явление средствами своей науки. Поэтому греки приняли, что геометрические объекты являются величинами более общей природы, чем дробные и целые числа, и попытались строить всю математику не на арифметической, а на геометрической основе. Так была принята «геометрическая алгебра» (V век до н. э.).

Однако эта геометрия циркуля и линейки не решила проблему. Возникли, например, знаменитые «три классические задачи древности»: «Удвоение куба», «Трисекция угла» и «Квадратура круга». Эти задачи не могли быть решены средствами «геометрической алгебры». Они были окончательно решены только в XIX в., причём отрицательно. Но это решение было связано с тем самым расширением понятия числа, введением и признанием иррациональных чисел, строгим построением теории действительных чисел. Хотя греки и

положили начало (Евдокс Книдский, 408–355 гг. до н. э.), проблемы решились только в процессе построения анализа бесконечно малых, основанного на строгих моделях действительных чисел (XIX в., Р. Дедекин, Г. Кантор, К. Вейерштрасс, О. Коши).



Дедекин, Рихард (1831–1916) · [Источник](#)

В кризис древнегреческой математики вмешались трудности с пониманием понятий «бесконечность», «непрерывность». Возникли «парадоксы Зенона Элейского» («Дихотомия», «Ахиллес и черепаха»), «атомистическая теория Демокрита», которые требовали своего объяснения.

Таким образом, уже в древнегреческой математике были поставлены те вопросы, которые связывают с кризисом оснований математики.

## Второй кризис

Он случился по причине использования инфинитезимальных методов. Творческое возрождение математики началось в XVII веке в трудах Ньютона и Лейбница, хотя и они стояли «на плечах гигантов». Их методы положили начало дифференциальному и интегральному исчислению, решающему многие проблемы непрерывных процессов. Они опирались на нестрогое понятие бесконечно малых величин, стремящихся к нулю, но никогда его не достигающих. Эта неразрешённая проблема в своё время поставила под вопрос научность математики. Не существовало чёткого определения предела. Предел строго не определяли, а лишь содержательно описывали, основываясь на механических и геометрических примерах.



Ньютон, Исаак (1642–1727) · [Источник](#)

Недостатки аналитических методов Ньютона вызывали нападки на его теорию флюксий. В 1734 г. английский философ, епископ Джордж Беркли выпустил памфлет, известный под названием «Аналист» («Аналист или рассуждение, обращённое к неверующему математику, где исследуется, более ли ясно воспринимаются или более ли очевидно выводятся предмет, принцип и умозаключения современного анализа, чем религиозные таинства и догматы веры»). «Аналист» содержал остроумную и во многом справедливую критику теории Ньютона.

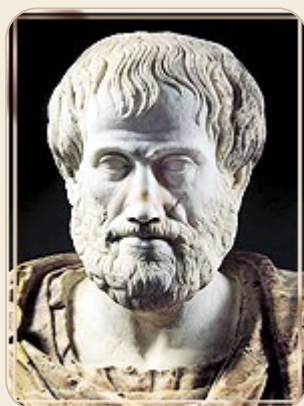
Выход был найден не скоро, только в начале XIX в. Огюстеном Коши. Он основывался на систематическом использовании понятия предела, определении непрерывной функции, производной как предела отношения, интеграла как предела сумм.

Таким образом, строгое построение анализа решило проблемы обоих кризисов математики.

## Третий кризис

Он продолжается и по сегодняшний день. Третий кризис связан, в основном, с теорией множеств, с определением меры бесконечности.

Аристотель определил в своём труде «Физика» два разных типа бесконечности: потенциальную бесконечность — безостановочный процесс роста, и актуальную бесконечность — реально существующую величину, но не имеющую конечной меры.



Аристотель (384–322 гг. до н. э.) · [Источник](#)



Кантор, Георг (1845–1918) · [Источник](#)

Математики долго спорили об этих определениях и их использовании, пока Георг Кантор не привёл доказательство существования бесконечного числа актуальных бесконечностей. Он привёл доказательство неравномощности бесконечностей. Например, множество натуральных чисел  $N$  (счётное множество) и множество действительных чисел  $R$  (континуальное множество) неравномощны.

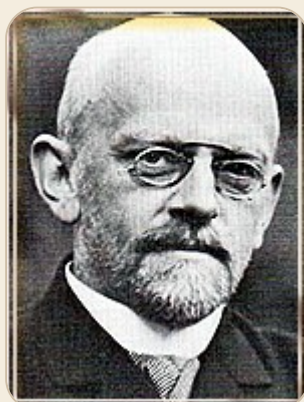
Проблема существования несчётных множеств, меньших по мощности, чем континуум, но больших, чем счётное (так называемая континуум-гипотеза), возникла в теории множеств практически с момента появления этой теории. В связи с переходом к новому уровню абстракции бесконечности теория множеств породила много парадоксов. Наиболее известные из них: «парадокс лжеца», «парадокс бродяги» и «парадокс Рассела».

Третий кризис поставил вопрос о точности математики, безупречности её основных понятий. И это затрагивает уже фундамент математики, поскольку речь идёт о статусе математической науки, правомерности построения её объектов, возможности их существования и критериях истинности утверждений о них.

По выводу математики из третьего кризиса сложились три направления: логицизм, интуиционизм и формализм. Но о них уже нужно говорить отдельно.

Новые проблемы в теории множеств и обосновании математики создали теоремы о неполноте арифметики Курта Гёделя (1930). Первая теорема утверждает, что если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует невыводимая и неопровержимая формула. Вторая теорема утверждает, что если формальная арифметика непротиворечива, то в ней невыводима формула, содержательно утверждающая непротиворечивость этой арифметики.

Есть и такое представление о кризисах математики: второй и третий кризисы на деле оказываются этапами одного и того же кризиса оснований математики. В итоге вместо трёх кризисов остаётся только один. «Три кризиса» являются мифом по той простой причине, что они есть порождение стремления рассматривать различные эпохи в истории математики по одному и тому же лекалу.



Гильберт, Давид (1862–1943) · [Источник](#)

Основной конфликт, который и подразумевал Герман Вейль в 1921 г., говоря о «новом кризисе оснований», имел в своей основе противостояние двух конкретных математиков: Давида Гильберта и Яна Брауэра. У каждого из них были свои, причём, не столько математические, сколько философские соображения, заставлявшие их считать, что с основаниями математики не всё благополучно и ситуация кризисная.

А вообще, не все математики считали свою науку находящейся в кризисе. Они, конечно же, прекрасно знали о наличии определённых неясностей, относящихся к базовым понятиям математики, например, понятию бесконечно малой величины.

Например, Дени Дидро, главный редактор знаменитой «Энциклопедии», подчёркивал сугубо человеческий характер математики: «Человек создал лабиринт и в нём заблудился». Лазар Карно приводит ставшие широко известными слова Даламбера: *«Идите вперёд, и вера придёт к вам»*.

Логические и теоретико-множественные парадоксы, которые традиционно считаются источником кризиса оснований, никогда всерьёз не ставили под угрозу математические результаты, равно как и их применимость к описанию физического мира. Так же и знаменитые «ограничительные» теоремы Курта Гёделя не слишком-то ограничили творческую активность работающих математиков. Ничего похожего на стагнацию математических исследований ни в то время, ни сейчас не наблюдается. Эпоха «третьего кризиса» была, напротив, эпохой невиданного ранее расцвета математического творчества.