



Гильмуллин, М. Ф. Алгоритм извлечения квадратного корня // Математика с Мансур-абый. 2025. URL: <https://history-math.org/ru/publications/hm-tt-a4449860e387-ru/>. Дата публикации: 02.02.2025.

ОЧЕРК

Алгоритм извлечения квадратного корня

Существуют различные методы извлечения квадратного корня из числа с любым количеством знаков, в том числе и вручную. А сколько способов знаете вы?

Мансур Гильмуллин · 02.02.2025 · RU

[Статья на сайте журнала](#)



· [Источник](#)

Существуют различные методы извлечения квадратного корня из числа с любым количеством знаков, в том числе и вручную.

Мы предлагаем вам один известный, но незаслуженно забытый метод. Когда-то он изучался в школе.

Квадратный корень легко извлекается с помощью калькулятора. Для этого достаточно набрать на нём исходное число и нажать клавишу корня. Правда, чаще всего на контрольных и экзаменах использовать калькулятор запрещено. Иногда разрешается использовать таблицы квадратов. Но если число не является полным квадратом, или оно многозначное, то таблицы не помогут. Вычисление корня через разложение на множители — тоже трудоёмкая операция.

Алгоритм на примерах

Алгоритм, о котором мы рассказываем, основан на формуле квадрата суммы чисел:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Он позволяет последовательно находить полное значение корня, цифра за цифрой. Если число является полным квадратом, то процесс завершается. Если же число не является полным квадратом, то алгоритм применяется для нахождения корня с любой точностью.

Вычисления оформляют аналогично «делению уголком». Иногда этот алгоритм называют «вычислением столбиком».

Итак, поехали. Сначала объясним на примерах, а потом попробуем обосновать теоретически.

Квадраты однозначных чисел (цифр) всем знакомы, причём они являются однозначными или двузначными. Поэтому из 1- или 2-значных чисел, если они квадратные, корни легко вычисляются в уме.

Если число трёх или четырёхзначное, то квадратный корень будет двузначным. Начнём с них.

Пример 1. Найдите квадратный корень из числа 2916

$$\begin{aligned}\sqrt{2916} &= 54, \\ 29 - 5^2 &= 29 - 25 = 4, \\ 100 \cdot 4 + 16 &= 416, \\ 104 \cdot 4 &= 416, \\ 416 - 416 &= 0.\end{aligned}$$

1. Сгруппируем число по две цифры. Двигаясь с конца влево сделаем небольшую метку: 29'16.

Сгруппированные цифры исходного числа называются гранями, а саму группировку по две цифры — разбиением на грани. Количество граней позволяет предположить, сколько цифр будет содержаться в извлечённом корне. В нашем примере извлечённый корень будет содержать две цифры, поскольку исходное число содержит две грани.

1. Теперь нужно извлечь квадратный корень из числа 29 с точностью до целых, получаем 5. Записываем 5 после знака равенства. Это первая цифра искомого корня.
2. Далее возводим число 5 в квадрат и полученный результат записываем под числом 29 (под первой гранью). Далее вычитаем из числа 29 число 25, получаем 4. Записываем это число под 25.
3. Сносим оставшиеся цифры (вторую грань) из под корня, а именно 16. Получаем число 416.

4. Теперь нужно найти следующую цифру корня. Её находят так. Первую найденную цифру корня, а именно 5 умножаем на 2, получаем 10.

Для удобства поиска второй цифры, слева от остатка проводят вертикальную линию и уже за этой линией записывают все действия. К числу 10 в конце нужно дописать ещё одну цифру (эта цифра впоследствии и станет следующей цифрой корня) и умножить образовавшееся число на ту же самую дописанную цифру. Полученное произведение должно быть равно остатку 416 или хотя бы максимально близким к нему, но не превосходящим его.

Итак, проверим например цифру 4. Допишем её к числу 10 и умножим образовавшееся число 104 на 4. Получилось число 416, которое в точности является нашим остатком. Значит дописанная к числу 10 цифра 4 является следующей цифрой корня. Возвращаемся к исходному примеру и записываем цифру 4 в ответе после цифры 5.

1. А число 416, которое получилось в результате умножения 104 на 4 записываем под остатком 416.

Выполняем вычитание $416 - 416 = 0$. Ноль в остатке говорит о том, что решение окончено.

Ответ: $\sqrt{2916} = 54$

Можете ли вы обосновать алгебраически (или геометрически) шаги этого алгоритма?

Идём далее. Если число 5- или 6-значное, то квадратный корень будет трёхзначным.

Пример 2. Вычислите квадратный корень из числа 56169

$$\begin{aligned}\sqrt{56169} &= 237, \\ 5 - 2^2 &= 5 - 4 = 1, \\ 100 \cdot 1 + 61 &= 161, \\ 43 \cdot 3 &= 129, \\ 161 - 129 &= 32, \\ 100 \cdot 32 + 69 &= 3269, \\ 467 \cdot 7 &= 3269, \\ 3269 - 3269 &= 0.\end{aligned}$$

Разобьём число на грани: 5'61'69 — их три, значит, в результате должно получиться трёхзначное число. Вычисления проводятся по тому же алгоритму. Повторяются шаги 4–6. Это продолжается до тех пор, пока не используется последняя грань.

Ответ: $\sqrt{56169} = 237$

Примечания

1. Этот алгоритм можно применять и для извлечения корня из конечных десятичных дробей. При этом на грани разбиваются отдельно целые и дробные части (целые налево, дробные направо от десятичной запятой).
2. Если корень не извлекается, то после последней цифры заданного числа ставят запятую и образуют дальнейшие грани, каждая из которых имеет вид 00. В этом случае процесс извлечения корня бесконечен. Он прекращается, когда достигается требуемая точность.
3. Подобный метод может быть использован для вычисления квадратного корня в любой системе счисления.

Пример 3. Вычислите квадратный корень из числа 421,4809

$$\begin{aligned}\sqrt{421,4809} &= 20,53, \\ 4 - 2^2 &= 4 - 4 = 0, \\ 100 \cdot 0 + 21 &= 21, \\ 40 \cdot 0 &= 0, \\ 21 - 0 &= 21, \\ 100 \cdot 21 + 48 &= 2148, \\ 405 \cdot 5 &= 2025, \\ 2148 - 2025 &= 123, \\ 100 \cdot 123 + 9 &= 12309, \\ 4103 \cdot 3 &= 12309, \\ 12309 - 12309 &= 0.\end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{421,4809} = 20,53$

Пример 4. Чему равен корень квадратный из 2?

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,4142\dots, \\ 2 - 1^2 &= 1, \\ 100 \cdot 1 &= 100, \\ 24 \cdot 4 &= 96, \\ 100 - 96 &= 4, \\ 100 \cdot 4 &= 400, \\ 281 \cdot 1 &= 281, \\ 400 - 281 &= 119, \\ 100 \cdot 119 &= 11900, \\ 2824 \cdot 4 &= 11296, \\ 11900 - 11296 &= 604, \\ 100 \cdot 604 &= 60400, \\ 28282 \cdot 2 &= 56564, \\ 60400 - 56564 &= 3836, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{2} = 1,4142\dots$

Шаги алгоритма

Пусть нужно извлечь квадратный корень из натурального числа n , причём известно, что корень извлекается.

1. Разобьём число n на грани (справа налево, начиная с последней цифры), включив в каждую грань по две рядом стоящие цифры. При этом следует учесть, что если n состоит из чётного числа цифр, то в первой (слева) грани будет две цифры. Если же число n состоит из нечётного числа цифр, то первая грань состоит из одной цифры. Количество граней показывает количество цифр результата.
2. Подбираем наибольшую цифру, такую, что её квадрат не превосходит числа, находящегося в первой грани. Эта цифра x — первая цифра результата.
3. Возведём первую цифру результата в квадрат, вычтем полученное число из первой грани.
4. Припишем (сносим) к найденной разности справа вторую грань. Получится некоторое число A .
5. Удвоив имеющуюся часть результата, получим число a . Теперь подберём такую наибольшую цифру y , чтобы произведение y на число $(10a + y)$, то есть y к a приписан y , — не превосходило числа A . Цифра y — вторая цифра результата.

6. Произведение y на число $(10a + y)$ вычтем из числа A , припишем к найденной разности справа третью грань, получится некоторое число B . Удвоив имеющуюся часть результата, получим число b . Его легче получить, сложив $(10a + y) + y = b$. Теперь подберём такую наибольшую цифру z , чтобы произведение z на число $(10b + z)$ не превосходило числа B . Цифра z — третья цифра результата.

Следующий шаг алгоритма повторяет 6-й шаг. Это продолжается до тех пор, пока не используется последняя грань.

Обоснование алгоритма

Если число является квадратом двузначного числа, то получаем цепочку равенств:

$$n = (10x + y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2 = 100x^2 + (20x + y)y$$

Эта цепочка отражает выполнение тех действий, которые описаны как шаги алгоритма.

Если число является квадратом трёхзначного числа, то получаем:

$$n = (100x + 10y + z)^2 = 10000x^2 + 2000xy + 100y^2 + 200xz + 20yz + z^2 = 10000x^2 + 10000xz + 10000z^2 + 2000xy + 2000xz + 100y^2 + 20yz + z^2$$

В случае произвольного многозначного числа выполняются аналогичные действия.

Список литературы

1. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. — М.: Наука, 1989. — 240 с.
2. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справ. материалы: Кн. для учащихся. — М.: Просвещение, 1990. — 416 с.