



Гильмуллин, М. Ф. Пространственное обобщение теоремы Пифагора // Математика с Мансур-абый. 2025. URL: <https://history-math.org/ru/publications/hm-tt-bca7aa61fddc-ru/>. Дата публикации: 22.06.2025.

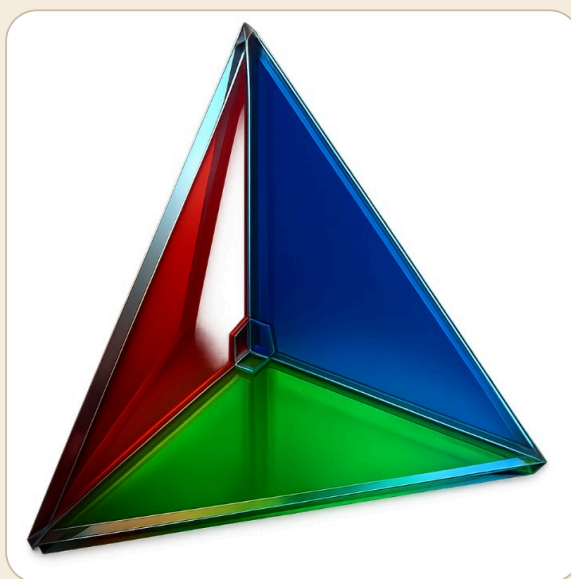
ЗАДАЧА

Пространственное обобщение теоремы Пифагора

Многие теоремы планиметрии имеют естественные обобщения в стереометрии. Что мы можем сказать по этому поводу о теореме Пифагора?

Мансур Гильмуллин · 22.06.2025 · RU

[Статья на сайте журнала](#)



Тетраэдр · [Источник](#)

Многие теоремы планиметрии имеют естественные обобщения в стереометрии. Что мы можем сказать по этому поводу о теореме Пифагора — одной из самых известных теорем математики?

«В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов»

Оказывается, существует изящное пространственное обобщение этой теоремы — для прямоугольного тетраэдра (тетраэдра, у которого три двугранных угла при одной вершине прямые). Оно формулируется так:

«В прямоугольном тетраэдре квадрат площади грани, лежащей против прямого трёхгранного угла, равен сумме квадратов площадей трёх остальных граней».

Этот результат известен в литературе как «Теорема де Гуа». Её в 1783 году представил Парижской академии наук Жан-Поль де Гуа (Jean-Paul de Gua de Malves, 1713–1785), французский математик, профессор Королевского колледжа в Париже.

Однако известно, что этот результат был знаком и другим математикам задолго до него.

Так, Рене Декарт (1596–1650) упоминает аналогичный факт в рукописях, а Шарль Тинсо (Charles Tinseau d'Amondans, 1748–1822) приводит его в своём труде «Mémoire sur les surfaces du second degré» (1774).

Независимо от них, Иоганн Фульгабер (1622), а позднее и Мейер Гирш (Meyer Hirsch) в книге «Sammlung geometrischer Aufgaben» (1807) также исследовали этот вопрос.

В советской литературе этот результат встречается как «задача Мейера Гирша», в частности в книге Г. Н. Попова «Сборник исторических задач по элементарной математике» (1938, с. 57), где приводится одно из доказательств.

Задача Мейера Гирша (№ 443).

Доказать, что в прямоугольном тетраэдре квадрат площади грани, лежащей против прямого трёхгранного угла, равен сумме квадратов площадей трёх остальных граней.

«Задача Мейера Гирша» из книги Г. Н. Попова «Сборник исторических задач по элементарной математике» (1938, с. 57)

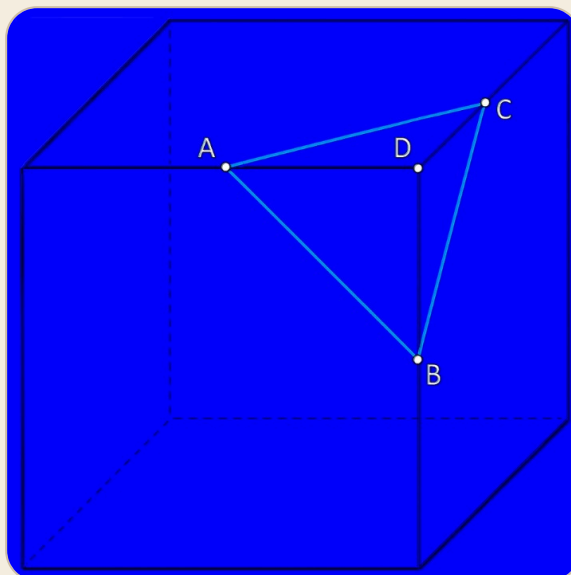
Мы считаем, что эта красивая задача является прекрасным примером для учебно-исследовательских работ учащихся в разделе «Различные доказательства одной теоремы». И предлагаем её вам в свою коллекцию.

Существует несколько способов доказательства этой теоремы:

1. Алгебраически-геометрический метод (с использованием формулы Герона и теоремы Пифагора).
2. Вычисление площадей граней (с применением теоремы о трёх перпендикулярах).
3. Векторный метод (через векторное произведение).
4. Координатный метод.
5. Метод проекций (с использованием свойств ортогональных проекций).

Приведём изящное и короткое доказательство методом проекций. Известно, что площадь ортогональной проекции плоской фигуры на некоторую плоскость равна площади этой фигуры, умноженной на косинус двугранного угла между фигурой и плоскостью проекции.

Для наглядности приведём прямоугольный тетраэдр (ABCD) как пирамиду, вырезанную около одной из вершин куба (D).



Схематичный чертёж к теореме де Гуа · [Источник](#)

Для прямоугольного тетраэдра проекциями грани ABC на координатные плоскости являются грани ABD, ACD и BCD. Поэтому:

$$S(ABD) = S(ABC)\cos\alpha, S(ACD) = S(ABC)\cos\beta, S(BCD) = S(ABC)\cos\gamma,$$

где α, β, γ — углы между гранью ABC и координатными плоскостями. По свойству направляющих косинусов (косинусов этих углов):

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Почленно сложив квадраты площадей граней:

$$S^2(ABC) = S^2(ABD) + S^2(ACD) + S^2(BCD).$$

Q.E.D.

Попробуйте самостоятельно провести другие доказательства.

Педагогическое значение теоремы

Теорема де Гуа — прекрасный пример для демонстрации:

- Метода аналогий в математике (переход от 2D к 3D).
- Важности обобщений в математике.
- Связи между алгебраическими и геометрическими подходами.
- Исторического развития математических идей.

Как отмечают педагоги, изучение таких аналогий между планиметрией и стереометрией помогает студентам лучше понимать пространственную геометрию.