



Гильмуллин, М. Ф. Метод бесконечного спуска: «математическая индукция наоборот» // Математика с Мансур-абый. 2025. URL: <https://history-math.org/ru/publications/hm-tt-c933e6a5aaf6-ru/>. Дата публикации: 04.06.2025.

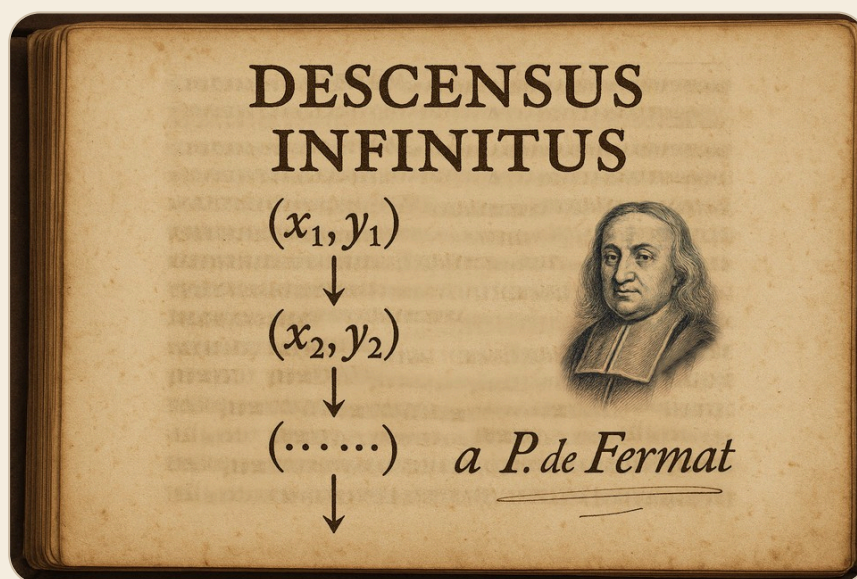
ОЧЕРК

Метод бесконечного спуска: «математическая индукция наоборот»

«Поскольку обычные методы, которые изложены в книгах, недостаточны для доказательства столь трудных предложений, я нашёл совершенно...

Мансур Гильмуллин · 04.06.2025 · RU

[Статья на сайте журнала](#)



Метод Descensus Infinitus — бесконечный спуск, изобретённый Пьером Ферма (1607–1665) · [Источник](#)

«Поскольку обычные методы, которые изложены в книгах, недостаточны для доказательства столь трудных предложений, я нашёл совершенно особый путь для того, чтобы достичь этого. Я назвал этот способ доказательства бесконечным (*infinie*) или неопределённым (*indefinie*) спуском; в начале я пользовался им только для доказательства отрицательных предложений: • что не существует числа, меньшего на единицу кратного трём, которое составлялось бы из квадрата и утроенного квадрата; • что не существует прямоугольного треугольника в числах, площадь которого была бы квадратным числом.

Доказательство проводится путём приведения к абсурду таким способом: если бы существовал какой-нибудь прямоугольный треугольник в целых числах, который имел бы площадь, равную квадрату, то существовал бы другой треугольник, меньший этого, который обладал тем же свойством.

Если бы существовал второй, меньший первого, который имел бы то же свойство, то существовал бы в силу подобного рассуждения третий, меньший второго, который имел бы то же свойство, и, наконец, четвёртый, пятый, спускаясь до бесконечности.

Но если задано число, то не существует бесконечности, по спуску меньших его (всё время подразумеваются целые число). Откуда заключают, что не существует никакого прямоугольного треугольника с квадратной площадью.»

Из письма Пьера Ферма к Пьеру де Каркави, французскому математику, академику, 1659 год.

Метод бесконечного спуска (фр. *descente infinie*) — один из самых элегантных и мощных методов доказательства в теории чисел. Его сформулировал Пьер Ферма в XVII веке. Суть метода — невозможность бесконечно убывающей последовательности натуральных чисел: если мы предполагаем существование решения, и из него можно построить всё меньшее и меньшее, то значит, исходное решение невозможно.



Скульптура «Ферма и его муза», Теофиль Барро, 1898. Возможно, именно муза вдохновила его на этот метод :)

· [Источник](#)

Метод бесконечного спуска — это доказательство от противного. Оно основано на аксиоме вполне упорядоченности натуральных чисел: любое непустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент. Если предположить, что решение существует, то можно построить бесконечную цепочку уменьшающихся решений, что приводит к противоречию.

Пример: иррациональность $\sqrt{2}$

Классическое доказательство, приписываемое пифагорейцам, использует идею спуска. Для этого число $\sqrt{2}$ предполагается рациональным числом, то есть $\sqrt{2} = p/q$, где p и q — натуральные.

Тогда $p^2 = 2q^2$. Это означает, что p — чётное число: $p = 2r$. Подставляя, получаем $q^2 = 2r^2$, значит, и q тоже чётное. Таким образом, числа p и q можно одновременно разделить на 2 и получить другое представление $\sqrt{2} = p_1/q_1$, $p > p_1$, $q > q_1$.

Можно продолжить эту операцию и взять ещё меньшие p_1 и q_1 , снова, и снова. Возникает бесконечно убывающая последовательность натуральных чисел, что невозможно.

Вывод: $\sqrt{2}$ не является рациональным числом, то есть оно — иррациональное число.

Формально элементы бесконечного спуска были уже у Евклида. В частности, при доказательстве существования простых делителей у составного числа и в доказательстве бесконечности множества простых (Книга IX, Пр. 20).

Ферма применил спуск для доказательства случая $n = 4$ Великой теоремы. Позже его метод подхватили Эйлер, Лагранж и другие. Многие энтузиасты и любители математики (ферматисты) пытались доказать с его помощью всю теорему Ферма — но метод требовал особой строгости, и все они допускали ошибки.

Метод бесконечного спуска часто называют «индукцией наоборот». Там, где математическая индукция строит восходящую цепочку, спуск показывает невозможность нисходящей.

Это своего рода мост между античной арифметикой и современной теорией чисел. Его элегантность и сила в том, что он опирается на простейшее свойство натуральных чисел и превращает абстрактные рассуждения о бесконечности в строгие доказательства.

Сегодня метод бесконечного спуска используется при доказательстве невозможности решений уравнений в целых числах — особенно диофантовых. Он встречается в теоретико-числовых задачах на математических олимпиадах.

Примеры

1. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ не имеет решений в натуральных числах.
2. Найти целые решения уравнения $4x^3 - 2y^3 - z^3 = 0$.

Этот метод остаётся важным историческим инструментом, напоминающим, что даже самые сложные задачи могут решаться с помощью простых идей.

Хотите узнать больше? Метод подробно и с примерами разобран в книге:  М. Ф. Гильмуллин «Методы решения уравнений в примерах» (2018). Найти её можно на Ridero по запросу [«Гильмуллин Методы решения уравнений»](#).

Мансур Файзрахманович Гильмуллин

Методы решения уравнений в примерах

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ



Обложка книги: М. Ф. Гильмуллин «Методы решения уравнений в примерах» (2018). Её можно найти, например, на сайте издательства Ridero.ru поиском «Гильмуллин Методы решения уравнений в примерах». На обложке изображена скульптура «Мыслитель» (фр. Le Penseur), автор Огюст Роден (фр. Auguste Rodin, 1840–1917). Возможно, мыслитель задумался именно над методом бесконечного спуска Ферма :) · [Источник](#)